Seminarprogramm Sommersemester 2018

Spezielle Themen der Elementaren Zahlentheorie

Voraussetzungen

Für die Vorträge in Teil I genügen die Grundvorlesungen. Für die Vorträge in Teil II und Teil III ist es von Vorteil, Elementare Zahlentheorie oder Algebra I gehört zu haben.

Vorbesprechung

Die Vorbesprechung findet am 5. 2. 2018 um 13 Uhr s.t. in Seminarraum 4 im Mathematikon INF 205 statt.

Vorträge

I. Zahlentheoretische Funktionen

Vortrag 1: Zahlentheoretische Funktionen **(17. 4. 2018)**

Quelle: Abschnitte 1.3.1 - 1.3.3 und 2.3.1 - 2.3.2 in [RU]

Wir führen den Begriff der zahlentheoretischen Funktion ein und sagen, wann eine solche Funktion multiplikativ heißt. In der elementaren Zahlentheorie gibt es eine Vielzahl sehr naheliegender zahlentheoretischen Funktionen. Wir studieren die einfachsten Beispiele und untersuchen sie auf Multiplikativität.

Vortrag 2: Der Möbius'sche Umkehrsatz **(24. 4. 2018)**

Quelle: Abschnitte 2.3.3 und 2.3.4 in [RU]

Für die Theorie der zahlentheoretischen Funktionen zentral ist die Dirichlet-Faltung. Wir zeigen, dass die zahlentheoretischen Funktionen zusammen mit der Faltung eine abelsche Gruppe bilden, in der die Teilmenge der multiplikativen zahlentheoretischen Funktionen eine Untergruppe ist (hierfür müssen wir auch Aufgabe 4 des Abschnitts lösen). Wir erkennen die Teilersummenfunktion einer zahlentheoretischen Funktion als Faltung mit der konstanten Funktion $e(n) \equiv 1$ und nutzen die Möbiusfunktion, um im Möbius'schen Umkehrsatz zu zeigen, dass jede zahlentheoretische Funktion die Teilersummenfunktion von genau einer zahlentheoretischen Funktion ist. Aus dem Umkehrsatz folgern wir schließlich noch einen Zusammenhang zwischen der Möbiusfunktion und der im ersten Vortrag behandelten Euler'schen φ-Funktion.

Vortrag 3: Sichtbare Gitterpunkte (8. 5. 2018)

Quelle: Kapitel 5 in [Hal], ab Definition 5.15

Die Landau-Symbolik gibt Auskunft über das Asymptotische Verhalten von Funktionen. Wir führen die Begrifflichkeiten ein und studieren einfache Beispiele unter den zahlentheoretischen Funktionen. Wir lernen die Partielle Abel'sche Summation kennen und zeigen mit dieser als erste Anwendung asymptotische Formeln für die endliche harmonische Reihe und die Logarithmusfunktion. Das Kernstück des Vortrags bilden drei Formeln, in denen Asymptotiken für Summen über bestimmte zahlentheoretische Funktionen angegeben werden. Im Falle der Euler'schen φ-Funktion erfahren wir so, dass sich in etwa 60,8 Prozent aller Elemente von $\mathbb{Z}^2$ mit dem Ursprung verbinden lassen, ohne dass ein weiteres Element auf der Verbindungsstrecke liegt. Diese Elemente nennen wir anschaulich auch die sichtbaren Punkte des Gitters $\mathbb{Z}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$.

Vortrag 4: Rankins Trick (15. 5. 2018)

Quelle: Abschnitt II.3 in [SS]

Für nicht-negative multiplikative zahlentheoretische Funktionen sind Abschätzungen von Wertesummen interessant. Üblich ist etwa die Betrachtung von Werten an Potenzen einer festen Primzahl. Abschätzungen nach oben sind dabei eher leicht; schwieriger sind Abschätzungen nach unten. Beide werden in diesem Vortrag behandelt und beide profitieren von Rankins Trick, der einfach darin besteht, die Summanden der betrachteten Wertesummen mit Werten einer geeignet zu wählenden Funktion zu gewichten.

II. Klassenzahlen quadratischer Zahlkörper

Vorträge 5 + 6: Ideale im Ganzheitsring eines quadratischen Zahlkörpers (22. 5. + 29. 5. 2018)

Quelle: Abschnitte 6.1, 6.2 und 6.3 in [Sch]

Genau wie in den ganzen Zahlen lassen sich auch im Ganzheitsring eines quadratischen Zahlkörpers Ideale und Primideale einführen. Wir verallgemeinern die entsprechende Theorie in diesem Sinne.

Vortrag 7: Gebrochene Ideale (5. 6. 2018)

Quelle: Abschnitt 6.4 in [Sch]

Um in den kommenden beiden Vorträgen den Zerlegungssatz zu beweisen, brauchen wir noch eine Technik, Ideale durcheinander dividieren zu können. Der Quotient ist dann nicht mehr notwendig ein Ideal, sondern ein so genanntes „gebrochenes Ideal". Wir führen diesen Begriff ein und zeigen, dass die Menge der nichttrivialen gebrochenen Ideale eines Zahlkörpers eine multiplikative abelsche Gruppe bildet. Es folgt der Satz über die eindeutige Primidealzerlegung.

Vorträge 8 + 9: Der Zerlegungssatz (12. 6. + 19. 6. 2018)

Quelle: Abschnitt 6.5 in [Sch]

In diesem Vortrag betrachten wir für eine gegebene Primzahl p die Primidealzerlegung des Ideals $p\mathcal{O}_K$ im Ganzheitsring eines gegebenen quadratischen Zahlkörpers K. In Abhängigkeit von dieser unterscheiden wir in K zwischen trägen, zerlegten und verzweigten Primzahlen. Der Zerlegungssatz beschreibt vermittels des Legendresymbols, wann welches Verhalten eintritt.

Vorträge 10 + 11: Die Idealklassengruppe (26. 6. + 3. 7. 2018)

Quelle: Abschnitt 6.6 in [Sch]

Will man sich die Idealarithmetik für das Rechnen mit Zahlen nutzbar machen, so steht man vor dem Problem, dass nicht jedes Ideal ein Hauptideal ist. Zur Behandlung dieses Problems definieren wir eine abelsche Gruppe, die Idealklassengruppe, die die Differenz zwischen beliebigen Idealen und Hauptidealen misst. Ist diese Gruppe trivial, so ist der Ganzheitsring $\mathcal{O}_K$ des betrachteten quadratischen Zahlkörpers K ein Hauptidealring. Ansonsten gibt uns die Struktur dieser Gruppe weitere Informationen. Es ist eine bemerkenswerte Tatsache, dass die Idealklassengruppe stets endlich ist. Diese Aussage zeigen wir auf geometrische Weise mit dem Minkowski'schen Gitterpunktsatz. Der Endlichkeitssatz erlaubt auch die Bestimmung der Idealklassengruppe; dies führen wir am Beispiel $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ vor.

Vortrag 12: Klassenzahl 1 **(10. 7. 2018)**

Quelle: Abschnitte 6.9 und 6.10 in [Sch], Abschnitt 8 von [Kas]

Die (endliche) Ordnung der Idealklassengruppe nennen wir die Klassenzahl h_K des quadratischen Zahlkörpers K. Offensichtlich ist es interessant, herauszufinden, wann der besonders einfache Fall $h_K = 1$ eintritt. Diese Frage zerfällt in zwei Unterfälle: Einerseits vermutet man, dass es unendlich viele reell-quadratische Zahlkörper mit Klassenzahl 1 gibt, bewiesen ist das aber noch nicht. Wir geben hier ein notwendiges Kriterien an. Andererseits besagt der Satz von Stark-Heegner, dass es genau 9 imaginärquadratische Zahlkörper mit Klassenzahl 1 gibt und gibt diese auch an. Der Beweis hierfür benötigt Kenntnisse über Modulformen und elliptische Kurven. Wir geben hier lediglich einen kurzen Einblick basierend auf Abschnitt 8 in [Kas] und geben uns ansonsten wieder mit einem (deutlich schwächeren) notwendigen Kriterium zufrieden. Abschließend untersuchen wir noch, welche imaginärquadratischen Zahlkörper euklidische Ganzheitsringe haben.

III. Quadratische Formen

Vortrag 13: Binäre quadratische Formen **(17. 7. 2018)**

Quelle: Abschnitt 8 in [Zag] bis inklusive Beweis von Satz 2; der Begriff der Darstellungsanzahl soll nicht eingeführt werden

Wir führen binäre quadratische Formen ein und definieren Diskriminanten und Äquivalenzklassen von solchen. Das erste große Resultat des Vortrags ist, dass es zu gegebener Diskriminante stets nur endlich viele Äquivalenzklassen binärer quadratischer Formen gibt. Wir erklären nun noch den Begriff des Automorphismus einer binären quadratischen Form und bringen solche Automorphismen im zweiten großen Resultat des Vortrags in Bezug zu den Lösungen einer geeigneten Pell'schen Gleichung. Da wir aus den Elementaren Zahlentheorie wissen, dass es einen solchen Bezug auch für die Elemente der Einheitengruppe eines quadratischen Zahlkörpers gibt, ist dies gleichsam die Motivation für den folgenden Vortrag.

Vortrag 14: Quadratische Formen und quadratische Zahlkörper **(24. 7. 2018)**

Quelle: Abschnitt 10 in [Zag]

In diesem Vortrag zeigen wir, dass die Theorie der binären quadratischen Formen, wenn deren Diskriminante eine Grundzahl ist, äquivalent zu der Theorie der Ideale in Ganzheitsringen quadratischer Zahlkörper ist.

Literatur

[Hal] K. Halupczok. *Elementare Zahlentheorie*. Vorlesungsskript, 2009. http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/FRLehre/ElZthSS2009Skript.pdf

[Kas] H. Kasten. *Die Ramanujankonstante (Vorlesungsskriptum 2010)*.

[RU] R. Remmert, P. Ullrich. *Elementare Zahlentheorie (3. Auflage)*. Birkhäuser, 2008.

[Sch] A. Schmidt. *Einführung in die algebraische Zahlentheorie*. Springer, 2007.

[SS] W. Schwarz, J. Spilker. *Arithmetical Functions*. London Mathematical Society LNS, Nr. **184**. Cambridge University Press, 1994.

[Zag] D. Zagier. *Zetafunktionen und quadratische Zahlkörper*. Springer, 1981.