Seminarprogramm Sommersemester 2015

Zahlentheoretische Funktionen

Voraussetzungen

Die Grundvorlesungen Analysis 1+2 und Lineare Algebra 1+2. Es ist sicher vorteilig, die Elementare Zahlentheorie besucht zu haben. Für die Vortragenden der Themen 8 und 9 empfehlen sich Vorkenntnisse in Funktionentheorie.

Vorbesprechung

Die Vorbesprechung findet am Montag, dem 2. 2. 2015, um 13-14 Uhr in Hörsaal 3 im Mathematischen Institut INF 288 statt.

Vorträge

Vortrag 1: Definition und erste Beispiele **(16. 4. 2015)**

Wir führen den Begriff der zahlentheoretischen Funktion ein und sagen, wann eine solche Funktion multiplikativ heißt. In der elementaren Zahlentheorie gibt es eine Vielzahl sehr naheliegender zahlentheoretischen Funktionen. Wir studieren die einfachsten Beispiele und untersuchen sie auf Multiplikativität.

Quelle: [RU], §§ 1.3.1, 1.3.2, 1.3.3, 2.3.1, 2.3.2

Vortrag 2: Der Möbius'sche Umkehrsatz **(23. 4. 2015)**

Für die Theorie der zahlentheoretischen Funktionen zentral ist die Dirichlet-Faltung. Wir zeigen, dass die zahlentheoretischen Funktionen zusammen mit der Faltung eine abelsche Gruppe bilden, in der die Teilmenge der multiplikativen zahlentheoretischen Funktionen eine Untergruppe ist (hierfür müssen wir auch Aufgabe 4 des Abschnitts lösen). Wir erkennen die Teilersummenfunktion einer zahlentheoretischen Funktion als Faltung mit der konstanten Funktion $e(n) \equiv 1$ und nutzen die Möbiusfunktion, um im

Möbius'schen Umkehrsatz zu zeigen, dass jede zahlentheoretische Funktion die Teilersummenfunktion von genau einer zahlentheoretischen Funktion ist. Aus dem Umkehrsatz folgern wir schließlich noch einen Zusammenhang zwischen der Möbiusfunktion und der im ersten Vortrag behandelten Euler'schen φ-Funktion.

Quelle: [RU], §§ 2.3.3, 2.3.4

Vortrag 3: Sichtbare Gitterpunkte (30. 4. 2015)

Die Landau-Symbolik gibt Auskunft über das Asymptotische Verhalten von Funktionen. Wir führen die Begrifflichkeiten ein und studieren einfache Beispiele unter den zahlentheoretischen Funktionen. Wir lernen die Partielle Abel'sche Summation kennen und zeigen mit dieser als erste Anwendung asymptotische Formeln für die endliche harmonische Reihe und die Logarithmusfunktion. Das Kernstück des Vortrags bilden drei Formeln, in denen Asymptotiken für Summen über bestimmte zahlentheoretische Funktionen angegeben werden. Im Falle der Euler'schen φ-Funktion erfahren wir so, dass sich in etwa 60,8 Prozent aller Elemente von $\mathbb{Z}^2$ mit dem Ursprung verbinden lassen, ohne dass ein weiteres Element auf der Verbindungsstrecke liegt. Diese Elemente nennen wir anschaulich auch die sichtbaren Punkte des Gitters $\mathbb{Z}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$.

Quelle: [Hal], Kapitel 5, ab Definition 5.15

Vortrag 4: Die Sätze von Wintner und Axer (7. 5. 2015)

Im Gegensatz zu den Dichtesätzen des vorangehenden Vortrags studieren wir nun Aussagen über Mittelwerte zahlentheoretischer Funktionen: Der Satz von Wintner liefert ein hinreichendes Kriterium für die Existenz eines Mittelwerts, der Satz von Axer verschärft dies, indem er sogar eine geschlossene Formel für diesen angibt. Aus Abschnitt II.1 soll der Begriff des Mittelwertes und eine Liste elementarer Beispiele mitgenommen werden. In Hinsicht auf Vortrag 7 soll schon hier erläutert werden, wie sich der Primzahlsatz als Mittelwertsatz formulieren lässt.

Quelle: [SS], § II.1 (vgl. Vortrag 6), II.2

Vortrag 5: Rankins Trick (21. 5. 2015)

Für nicht-negative multiplikative zahlentheoretische Funktionen sind Abschätzungen von Wertesummen interessant. Üblich ist etwa die Betrachtung von Werten an Potenzen einer festen Primzahl. Abschätzungen nach oben sind dabei eher leicht; schwieriger sind Abschätzungen nach unten.

Beide werden in diesem Vortrag behandelt und beide profitieren von Rankins Trick, der einfach darin besteht, die Summanden der betrachteten Wertesummen mit Werten einer geeignet zu wählenden Funktion zu gewichten.

Quelle: [SS], § II.3

Vorträge 6 + 7: Ein elementarer Beweis des Primzahlsatzes (28. 5. + 11. 6. 2015)

Aus Abschnitt II.1 soll zunächst der Begriff der Dichte und eine Liste elementarer Beispiele mitgenommen werden, dann präsentieren wir den Beweis des Satzes von Saffari-Daboussi wie in Abschnitt II.8 (Für multiplikative Funktionen gibt es auch einen Beweis aus der Theorie der Dirichletreihen heraus, der in Vortrag 12 behandelt werden wird.). Schließlich leiten wir über eine Verfeinerung der selben Methoden einen elementaren Beweis für den Gauß'schen Primzahlsatz her.

Quelle: [SS], §§ II.1 (vgl. Vortrag 4), II.8, II.9

Vortrag 8: Analytische Theorie der Dirichletreihen (18. 6. 2015)

Wir führen den Begriff der Dirichletreihe ein und studieren das Konvergenzverhalten solcher Reihen. Besonders wichtig ist der Spezialfall der gewöhnlichen Dirichletreihen, die keine Potenzreihen sind und die wir in den Folgevorträgen ausschließlich benutzen werden. Diese konvergieren immer in einer rechten Halbebene $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$ der komplexen s-Ebene. Abschließend zeigen wir noch den Satz von Landau, der für bestimmte gewöhnliche Dirichletreihen eine Singularität auf der Konvergenzabszisse $\mathrm{Re}(s) = \sigma_0$ garantiert, und den Identitätssatz für Dirichletreihen.

Quelle: [Zag], Abschnitt 1 (inklusive Beweis von Satz 3)

Vortrag 9: Formale Eigenschaften von Dirichletreihen (25. 6. 2015)

Ganz abstrakt kann man nun von zwei Dirichletreihen die Summe und das Produkt bilden, letzteres als multiplikative Faltung. Wir zeigen, dass die Summe zweier konvergenter Dirichletreihen konvergiert, und das Produkt auch, wenn mindestens einer der Faktoren absolut konvergiert. Wir zeigen, dass Dirichletreihen, deren Koeffizienten durch eine multiplikative Funktion gegeben sind, eine Darstellung als unendliches Produkt über alle Primzahlen haben, als ein so genanntes Eulerprodukt (benötigte Konvergenzkriterien für unendliche Produkte dürfen unbewiesen aus Abschnitt 2.3 in [Kas] zitiert werden). Wir geben Produktdarstellungen für eine Reihe von Dirichletreihen an, wie etwa der Riemann'schen Zetafunktion.

Quelle: [Zag], Abschnitt 2 (ohne Satz 2, der schon in Vortrag 2 gezeigt wurde)

Vorträge 10 + 11: Verwandte zahlentheoretische Funktionen (2. 7. + 9. 7. 2015)

Wir führen den Begriff der verwandten zahlentheoretischen Funktionen ein und zeigen den Hauptsatz der zugehörigen Theorie. Der Beweis des letzteren nimmt den größten Teil der Abschnitte III.2 und III.3 ein.

Quelle: [SS], §§ III.1, III.2, III.3

Vortrag 12: Die Sätze von Lucht und Saffari-Daboussi (16. 7. 2015)

In diesem Vortrag werden abschließend mögliche Anwendungen der Theorie präsentiert, die in den beiden vorherigen Vorträgen eingeführt worden ist. Namhaft sind hier der Satz von Lucht und ein schneller Beweis (eines Spezialfalls) des Satzes von Saffari-Daboussi, den wir schon in 6 kennengelernt haben.

Quelle: [SS], §§ III.4, III.5, III.6

Literatur

[Hal] K. Halupczok. *Elementare Zahlentheorie*. Vorlesungsskript, 2009. `wwwmath.uni-muenster.de/u/karin.halupczok/ElZthSS2009Skript.pdf`

[Kas] H. Kasten. *Funktionentheorie 2*. Vorlesungsskript, 2014. `http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~kasten/files/Skripte/ws14funktheo2.pdf`

[RU] R. Remmert, P. Ullrich. *Elementare Zahlentheorie (3. Auflage)*. Birkhäuser, 2008.

[SS] W. Schwarz, J. Spilker. *Arithmetical Functions*. London Mathematical Society LNS, Nr. **184**. Cambridge University Press, 1994.

[Zag] D. Zagier. *Zetafunktionen und quadratische Körper*. Springer, 1981.