Seminarprogramm Sommersemester 2015
Modulformen

Voraussetzungen

Funktionentheorie 2

Vorbesprechung

Die Vorbesprechung findet am Montag, dem 4. 2. 2015, um 13-14 Uhr in Hörsaal 3 im Mathematischen Institut INF 288 statt.

Vorträge

Vortrag 1: Dirichletreihen und Mellintransformation **(14. 4. 2015)**

Eine (gewöhnliche) Dirichletreihe ist eine Reihe der Form

$$\sum_n a_n n^{-s},$$

wobei s eine komplexe Variable ist. Wir untersuchen kurz ganz allgemein das Konvergenzverhalten von Dirichletreihen, um dann speziell zu einer Modulform f von Gewicht k eine solche einzuführen. Diese konvergiert für $\mathrm{Re}(s) > \frac{k}{2} + 1$ und lässt sich bis auf gut zu kontrollierende Faktoren durch die so genannte Mellintransformation aus f gewinnen.

Quelle: [Zag], Abschnitt 1 und [Lan], Abschnitte I.4-I.5

Vortrag 2: Heckeoperatoren **(21. 4. 2015)**

Zu jeder ganzen Zahl n definieren wir auf der freien abelschen Gruppe $\mathscr{L}$ der Gitter in $\mathbb{C}$ den n-ten Heckeoperator $T(n)$ durch die Zuordnung

$$T(n)(L) := \sum_{[L:L']=n} L' \quad \text{für alle } L \in \mathscr{L}.$$

Wir studieren diese und ähnliche Operatoren und übersetzen sie in Operatoren auf dem Raum der Modulformen festen Gewichts.

Quelle: [Lan], Abschnitt II.1 (ergänzend: [KK], Abschnitt IV.1)

Vortrag 3: Eulerprodukte und L-Reihen (28. 4. 2015)

Wir untersuchen bestimmte Rechenregeln, was uns darauf führt, dass die Fourierkoeffizienten einer Modulform, die simultane Eigenform zu allen Heckeoperatoren ist, nach geeigneter Normierung gerade die Heckeeigenwerte sind. Wir schließen daraus, dass die Dirichletreihe der Modulform eine Eulerproduktdarstellung besitzt. Wenn noch Zeit ist, kann an dieser Stelle auch gezeigt werden, dass die Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Eigenwerte einer Heckeeigenform unendlich viele Vorzeichenwechsel hat.

Quelle: [Lan], Abschnitt II.2 (Für den optionalen Stoff halte ich Material bereit.)

Vortrag 4: Das Petersson'sche Skalarprodukt (5. 5. 2015)

Als ein Integral über einen Fundamentalbereich mit dem dort definierten invarianten Volumenelement führen wir das Peterssonskalarprodukt auf dem Raum der Spitzenformen festen Gewichts ein. Wir zeigen, dass der Wert des Skalarprodukts nicht von der Wahl des Fundamentalbereichs abhängt und sich wohlverhält, wenn man zu Untergruppen übergeht. Außerdem sind die Heckeoperatoren selbstadjungiert unter dem Peterssonskalarprodukt, was uns abschließend ermöglicht, eine besondere Basis für den Raum der Spitzenformen festen Gewichts anzugeben.

Quelle: [KK], Abschnitte IV.3.1-IV.3.6

Vortrag 5: Modulformen höherer Stufe I (12. 5. 2015)

Modulformen und Heckeoperatoren können nicht nur bezüglich der vollen Modulgruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eingeführt werden, sondern auch zu beliebigen Kongruenzuntergruppen. Um dies für die Gruppe $\Gamma_1(N)$ mit einem $N \in \mathbb{N}$ zu tun, müssen wir anstelle von Gittern Paare (t, L) betrachten, wobei L wie gewohnt ein Gitter und t einen Punkt auf dem Quotienten $\mathbb{C}/L$ von genauer Ordnung N bezeichne.

Quelle: [Lan], Abschnitte VII.1-VII.2

Vortrag 6: Modulformen höherer Stufe II (19. 5. 2015)

In diesem Vortrag studieren wir zunächst die Wirkung von Heckeoperatoren auf der q-Entwicklung von Modulformen. Hierfür führen wir für alle $d \in \mathbb{N}_{>0}$ die nützlichen Hilfsoperatoren U_d und V_d ein. Das führt dazu, dass wir auch die Aktion von Heckeoperatoren auf Modulformen höherer Stufe in Form einer Spur ausdrücken können, wobei wir über ein geeignetes Vertretersystem von Matrizen aufsummieren. Wir schließen damit, dass wir das Peterssonskalarprodukt auch in dieser Situation untersuchen.

Quelle: [Lan], Abschnitte VII.3-VII.5

Vortrag 7: Stufenwechsel **(26. 5. 2015)**

In den letzten drei Vorträgen wollen wir nun die Theorie von Atkin und Lehner studieren, die uns eine Zerlegung des Raums der Spitzenformen $S_k(N, \chi)$ in so genannte Alt- bzw. Neuformen liefert. Altformen sind hierbei Spitzenformen, die sich aus Formen einer Stufe $d \mid N$ gewinnen lassen, die Neuformen sind solche, die im Peterssonorthokomplement dazu liegen. Wir führen nun zunächst in dieser Theorie ein und studieren die dafür benötigte Frickeinvolution.

Quelle: [Lan], Abschnitte VII.6 und VIII.1, eine Ausarbeitung hierzu findet sich in [Schm].

Vorträge 8 + 9: Der Struktursatz **(2. 6. + 9. 6. 2015)**

Den ersten großen Höhepunkt unseres Seminars bildet schließlich der Struktursatz, auch Multiplizität-1-Satz genannt, der eine orthogonale Zerlegung des Raums der Spitzenformen in Heckeeigenräume liefert. Die Eigenräume, die zu den Neuformen gehören, kommen dabei mit Multiplizität 1 vor, was den Namen des Satzes erklärt. *Den größten Teil dieses Themas nimmt der recht lange Beweis eines technischen Hilfssatzes ein (vgl. Abschnitt VIII.4), so dass mir eine befriedigende Aufteilung dieses Themas in zwei Vorträge schwer erschien. Ich schlage daher vor, dass sich zwei Vortragende die Aufgabe teilen.*

Quelle: [Lan], Abschnitte VIII.2-VIII.4, eine Ausarbeitung hierzu findet sich in [Schm].

Vortrag 10: Die Polynomdarstellung **(16. 6. 2015)**

Die Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ und somit auch ihre Untergruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ operiert auf dem Vektorraum $\mathbb{P}_d$ der homogenen Polynome von Grad d in den Variablen X und Y via

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .P(X,Y) = P(aX + bY, cX + dY) \quad \text{für alle } P \in \mathbb{P}_d.$$

Das Ziel dieses Vortrags ist es, diese Aktion genauer kennenzulernen.

Quelle: [Ber], Kapitel 2

Vortrag 11: Das Shimura-Produkt auf Differentialformen (23. 6. 2015)

Wir führen den Begriff der Differentialform auf der oberen komplexen Halbebene $\mathbb{H}$ ein und studieren, wie eine Matrix $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf solchen Differentialformen operiert. Wir können dann das so genannte Shimura-Produkt zweier Differentialformen als

$$[\omega, \eta] := {}^t\omega \wedge Q\eta$$

bilden mit einer geeigneten Matrix $Q \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{R})$, die aus dem vorherigen Vortrag bekannt ist. *Zu Differentialformen auf Riemann'schen Flächen können noch ein paar Beispiele gemacht werden.*

Quelle: [Ber], Kapitel 3 und Anhang A

Vorträge 12 + 13: Der Eichler-Shimura-Isomorphismus (30. 6. + 7. 7. 2015)

Die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$f \mapsto \int_0^{i\infty} \mathrm{Re}(f(z) \begin{pmatrix} z^d \\ \vdots \\ z^0 \end{pmatrix} \mathrm{d}z)$$

vom Raum der holomorphen Spitzenformen vom Gewicht k nach $\mathbb{R}^{d+1}$ heißt die Periodenabbildung. Vermöge der Polynomdarstellungen lässt sich ihr Bild genauer beschreiben und so ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen konstruieren; der Eichler-Shimura-Isomorphismus, der den zweiten großen Höhepunkt unseres Seminars darstellt.

Quelle: [Ber], Kapitel 5

Vortrag 14: Die Verknüpfung mit der Kohomologie (14. 7. 2015)

In diesem Vortrag verstehen wir den Eichler-Shimura-Isomorphismus der letzten Vorträge dadurch besser, dass wir den Bildraum als Eichler-Kohomologie der zugehörigen Matrixdarstellung auffassen.

Quelle: [Ber], Kapitel 6

Literatur

[Ber] S. Bergeler. *Der Eichler-Shimura-Isomorphismus auf* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *(Bachelorarbeit 2011).*

[KK] M. Koecher, A. Krieg. *Elliptische Funktionen und Modulformen*. Springer, 1998.

[Lan] S. Lang. *Introduction to Modular Forms*. Springer, 1976.

[Schm] C.-G. Schmidt. *Modulfunktionen (Vorlesungsskriptum 2000).*

[Zag] D. Zagier. *Zetafunktionen und quadratische Körper*. Springer, 1981.