Seminarprogramm Sommersemester 2014

Riemann'sche Flächen

Voraussetzungen: Funktionentheorie 1 + 2 inklusive der Definition des Begriffs der Riemann'schen Fläche.

Vorbesprechung: am Dienstag, dem 4. 2. 2014, um 13 Uhr c.t. in Hörsaal 3, INF 288.

Vorträge

1 Homotopie von Kurven — 15. 4. 2014

Wir führen in Verallgemeinerung der entsprechenden Überlegungen in Funktionentheorie 1 Kurven als stetige Abbildungen von einem reellen Intervall in einen topologischen Raum ein. Grundlegend ist hier der Begriff der Homotopie, also der stetigen Verformung von Kurven, welcher eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Kurven in einem gegebenen topologischen Raum X darstellt. Dies führt für geschlossene Kurven zur Definition der Homotopiegruppe $\pi_1(X, a)$, einer Gruppenstruktur auf der Menge der Homotopieklassen geschlossener Kurven mit Anfangspunkt $a \in X$. Es stellt sich heraus, dass diese Gruppen für alle Basispunkte $a \in X$ isomorph sind, so dass wir schlicht $\pi_1(X)$ schreiben und sie als topologische Invariante des Raums X auffassen können. $\pi_1(X)$ heißt auch die Fundamentalgruppe von X. **Literatur: Abschnitt 3 in [For].** *Dieser Vortrag profitiert besonders von ein paar erläuternden Zeichnungen.*

2 Überlagerungen — 22. 4. 2014

In der Funktionentheorie begegnet einem das Problem, dass man für manche Funktionen wie etwa die Exponentialfunktion $\exp(z)$ oder die Potenzfunktionen z^n mit $n > 1$ keine eindeutige Umkehrfunktion angeben kann. Stattdessen sind der Logarithmus und die Wurzelfunktionen mehrdeutig; sie besitzen mehrere Zweige. Dieses Verhalten lässt sich im Kontext Riemann'scher Flächen durch verzweigte Überlagerungen beschreiben. Hierfür führen wir zunächst Überlagerungsabbildungen ein und zeigen, dass nichtkonstante holomorphe Abbildungen solche sind. Wir definieren den Begriff des Verzweigungspunkts und nennen in Abhängigkeit von der Existenz eines solchen eine Überlagerung verzweigt oder unverzweigt. Diese Fälle werden dann einzeln studiert. Wichtig sind hierbei insbesondere die Beispiele 4.5 und 4.12, die an das bereits aus der Funktionentheorie bekannte anknüpfen. **Literatur: Abschnitt 4 in [For].** *Dieser Vortrag ist recht großzügig zugeschnitten, so dass sicherlich nicht der gesamte Inhalt vorgeführt werden kann. Andererseits sind einige der vorkommenden Beweise untereinander sehr ähnlich* *(wie etwa die von 4.6 bis 4.9 und die von 4.14, 4.15, 4.17 und 4.19), so dass man sich an diesen Stellen auf jeweils einen Beweis beschränken kann.*

3 Universelle Überlagerungen 29. 4. 2014

In diesem Vortrag werden die topologischen Betrachtungen der letzten beiden Vorträge zusammengeführt. Es stellt sich nämlich heraus, dass es unter allen unverzweigten unbegrenzten Überlagerungen einer Mannigfaltigkeit X eine „größte" solche gibt, die so genannte universelle Überlagerung. Diese ist einfach zusammenhängend und hängt von der Struktur her über die Gruppe der so genannten Decktransformationen eng mit der Fundamentalgruppe von X zusammen. **Literatur: Abschnitt 5 in [For].** *Dieser Vortrag enthält mit 5.3 und 5.6 zwei Sätze mit großen Beweisen, die sehr sorgfältig präsentiert werden müssen. Das bedingt allerdings, dass an anderer Stelle gespart werden muss. Ich bitte den Vortragenden, sich diesbezüglich mit mir in Verbindung zu setzen.*

4 Garben 6. 5. 2014

In der Funktionentheorie hat man es häufig mit Funktionen in wechselnden Definitionsbereichen zu tun. Der Begriff der Garbe gibt einen geeigneten formalen Rahmen zur Behandlung dieser Situation. Zunächst werden Prägarben definiert, indem dem System der offenen Mengen eines topologischen Raums eine Familie abelscher Gruppen zugeordnet wird, wobei wir fordern, dass es zwischen Gruppen, die zu ineinander enthaltenen Umgebungen gehören, Gruppenhomomorphismen mit bestimmten Kompatibilitätsforderungen bestehen. Erfüllt eine Prägarbe noch zwei zusätzliche Axiome, so nennt man sie eine Garbe. Das landwirtschaftliche Vokabular wird abgerundet durch die Konzepte des Schnitts, des Halms und des Keims. Als eine erste wichtige Anwendung der neuen Begriffe studieren wir analytische Fortsetzungen von Funktionskeimen. **Literatur: Abschnitte 6 und 7 in [For].** *In diesem Vortrag ist vor allem der Inhalt von Abschnitt 6 von Bedeutung für spätere Vorträge. Wenn also Inhalte gekürzt werden sollen, so muss dies (in Absprache mit mir!) in Abschnitt 7 geschehen.*

5 Differentialformen 13. 5. 2014

In diesem Vortrag führen wir den sehr wichtigen Begriff der Differentialform auf einer Riemann'schen Fläche ein. Dabei betrachten wir nicht nur holomorphe und meromorphe Differentialformen sondern auch solche, die nur reell differenzierbar sind. Stichwörter hierbei sind das Wirtingerkalkül, das Differential einer Funktion, Differentialformen 1. Ordnung, das Residuum einer solchen, das äußere Produkt und schließlich Differentialformen höherer Ordnung. **Literatur: Abschnitt 9 in [For].** *Die in diesem Vortrag eingeführten Begriffe und Notationen sind wesentlich für alle folgenden Vorträge.*

6 Integration von Differentialformen 1 20. 5. 2014

Differentialformen 1. Ordnung kann man über Kurven integrieren. Ist die Differentialform geschlossen, so hängt das Integral nur von der Homotopieklasse der Kurve ab; das ist eine Verallgemeinerung des Cauchy'schen Integralsatzes. Wir treiben dieses Spiel weiter und untersuchen die Existenz von Stammfunktionen auf Riemann'schen Flächen. Der Vortrag endet mit der Untersuchung von so genannten Perioden von Differentialformen. **Literatur: Abschnitt 10.A in [For].**

7 Integration von Differentialformen 2 27. 5. 2014

In Fortsetzung des letzten Vortrags interessieren wir uns nun für die Integration von Differentialformen 2. Ordnung. Der Höhepunkt des Vortrags ist der Residuensatz für Riemann'sche Flächen. Wichtige Hilfsmittel hierbei sind der Satz von Stokes und Partitionen der Eins. Ersterer ist natürlich schon bekannt, letztere werden wir zu diesem Zweck einführen. **Literatur: Abschnitt 10.B und Anhang A in [For].** *Für die Partition der Eins benötigen wir die in Funktionentheorie 2 zunächst etwas unmotivierte Anforderung an Riemann'sche Flächen, das zweite Abzählbarkeitsaxiom zu erfüllen.*

8 Garbenkohomologie 3. 6. 2014

In diesem Vortrag wollen wir den Begriff der Garbenkohomologie einführen, der beim Beweis der meisten großen Sätze später eine wichtige Rolle spielen wird. Die erste Kohomologiegruppe einer Garbe $\mathscr{F}$ wird zunächst in Abhängigkeit einer Überdeckung der Riemann'schen Fläche X eingeführt; durch die Betrachtung von Verfeinerungen und induktive Grenzwertbildung (um dieses Konzept ordentlich einzuführen, lohnt ein Blick in [Neu]) gelangen wir zu einer Definition von $H^1(X, \mathscr{F})$. Als nächstes zeigen wir für einige Beispiele von Garben, dass die erste Homologiegruppe verschwindet, wie etwa für die Garbe der differenzierbaren Funktionen auf X. Mit dem Satz von Leray beweisen wir schließlich ein Hilfsmittel, das sich in vielen Fällen bei der Berechnung von Kohomologiegruppen als nützlich erweisen wird. **Literatur: Abschnitt 12 in [For] und Abschnitt IV.2 in [Neu]**

9 Das Geschlecht 10. 6. 2014

Ab diesem Vortrag werden wir uns bis zum Schluss des Seminars mit kompakten Riemann'schen Flächen beschäftigen. Hier zeigen wir, dass für eine kompakte Riemann'sche Fläche X die Kohomologiegruppe $H^1(X, \mathcal{O})$ ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum ist. Die Dimension dieses Vektorraums heißt das Geschlecht von X. Eine Folgerung des Endlichkeitssatzes ist außerdem, dass es auf einer kompakten Riemann'schen Fläche stets nicht-konstante meromorphe Funktionen gibt.

Literatur: 13.1 bis einschließlich 14.13 in [For]. *Der Vortrag beginnt mit zwei vorgelagerten Themenkomplexen, die jeweils nur skizzenhaft präsentiert werden sollen, nämlich dem Lemma von Dolbeault mit seinen Folgerungen (13.1 bis 13.5) und etwas Funktionalanalysis (14.1 bis 14.7). Das Hauptthema ist dann der Endlichkeitssatz 14.10 mit seinen Korollaren.*

10 Die exakte Kohomologiesequenz 17. 6. 2014

In diesem Vortrag erklären wir den Begriff des Garbenhomomorphismus', exakte Garbensequenzen und die aus einer kurzen exakten Garbensequenz hervorgehende exakte Kohomologiesequenz, die uns ein Hilfsmittel an die Hand gibt, Kohomologiegruppen zu berechnen oder auf andere Gruppen zurückzuführen. **Literatur: Abschnitt 15 in [For].**

11 Der Satz von Riemann-Roch 24. 6. 2014

Der Satz von Riemann-Roch ist der zentrale Satz in der Theorie der kompakten Riemann'schen Flächen. Grob gesprochen macht er eine Aussage über die Anzahl linear unabhängiger meromorpher Funktionen, deren Polstellenverhalten gewissen Einschränkungen unterworfen ist. **Literatur: Abschnitt 16 in [For].**

12 Der Serre'sche Dualitätssatz 1. 7. 2014

Der Serre'sche Dualitätssatz erlaubt eine einfachere Interpretation der Kohomologiegruppen $H^1(X, \mathcal{O}_D)$ für einen Divisor D mithilfe von Differentialformen. Eine Folgerung daraus ist die Formel von Riemann-Hurwitz, mit der man das Geschlecht einer Überlagerung aus der Blätterzahl und der Verzweigungsordnung berechnen kann. **Literatur: Abschnitt 17 in [For] bis inklusive 17.14.** *Die Formel von Riemann-Hurwitz wird elementarer (aber unter Zuhilfenahme von nicht trivial zu präzisierender Anschauung) schon in meinem Skript [Kas] bewiesen, wo ich daraus auch die Geschlechtsformel in einem Spezialfall herleite.*

13 Mittag-Leffler-Verteilungen 8. 7. 2014

Die schon in Funktionentheorie 2 behandelte Frage nach der Lösbarkeit von Mittag-Leffler-Verteilungen können wir nun nicht nur für $\overline{\mathbb{C}}$ und Tori sondern für beliebige kompakte Riemann'sche Flächen beantworten. Es stellt sich heraus, dass die Lösbarkeit davon abhängt, ob die geforderten Polstellen so genannte Weierstraßpunkte sind. Wir zeigen, dass es auf kompakten Riemann'schen Flächen nur recht wenige solcher Punkte gibt. **Literatur: Der Rest von Abschnitt 17 und Abschnitt 18 in [For].**

14 Das Abel'sche Theorem 15. 7. 2014

Den Schlusspunkt des Seminars setzen wir mit dem Beweis des Abel'schen Theorems, das wir in Funktionentheorie 2 ebenfalls nur für $\overline{\mathbb{C}}$ und Tori gezeigt hatten. **Literatur: Abschnitte 19 und 20 in [For].** *Das ist ziemlich viel Stoff. Dieser darf dahingehend verkürzt werden, dass Resultate ausgelassen werden, die nicht zum Beweis des Abel'schen Theorems 20.7 beitragen. Das trifft natürlich insbesondere auf 20.8 zu, auch wenn es schön wäre zu sehen, dass die Einschränkung des allgemeinen Satzes 20.7 auf Tori die bekannte Aussage liefert.*

Literatur

[For] O. Forster. *Riemannsche Flächen*. Springer, 1977.

[Kas] H. Kasten. *Funktionentheorie 2 (Vorlesungsskript)*.

[Neu] J. Neukirch. *Algebraische Zahlentheorie*. Springer, 1992.