Seminarprogramm Sommersemester 2013
Modulformen

Voraussetzungen: Funktionentheorie 2.

Vorbesprechung: am Freitag, dem 8. 2. 2013, um 13 Uhr c.t.
in Hörsaal 4 in INF288.

Vorträge

1 Gruppenaktionen auf der oberen Halbebene — 18. 4. 2013

Die Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, und somit auch alle ihre Untergruppen, operiert stetig auf der Riemann'schen Zahlenkugel $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Es gibt dabei vier durch ihre Matrixspur unterschiedene Typen von Gruppenelementen, die als parabolisch, elliptisch, hyperbolisch oder loxodromisch bezeichnet werden. Wir stellen fest, dass diese sich auch durch ihr Fixpunktverhalten auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ charakterisieren lassen und untersuchen diese Fixpunkte genauer. **Literatur: Abschnitt 1.1 in [Kas].**

2 $\Gamma\backslash\mathbb{H}^*$ als Riemann'sche Fläche — 25. 4. 2013

In diesem Vortrag betrachten wir diskrete Untergruppen Γ von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ und lassen diese auf der erweiterten oberen Halbebene $\mathbb{H}^* := \mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ operieren. Wir führen den Begriff der Riemann'schen Fläche ein und zeigen Stück für Stück, dass der Quotient $\Gamma\backslash\mathbb{H}^*$ die Struktur einer kompakten Riemann'schen Fläche trägt. **Literatur: Abschnitt 1.2 in [Kas]. Definition und erste Eigenschaften von Riemann'schen Flächen findet man allgemeiner in [For] erklärt.** *Dieser Vortrag ist recht großzügig zugeschnitten. Ich bitte den Vortragenden, sich für die genaue Ausgestaltung mit mir in Verbindung zu setzen.*

3 Fundamentalbereiche und Kongruenzgruppen — 2. 5. 2013

Wir definieren nun, was ein Fundamentalbereich für die Aktion einer diskreten Untergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{H}$ ist und untersuchen diesen im Spezialfall $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ genauer. Weiter studieren wir die so genannten Kongruenzuntergruppen; also Untergruppen von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, die für ein $N \in \mathbb{N}$ die Gruppe

$$\Gamma(N) = \{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid M \equiv I_2 \bmod (N)\}$$

enthalten. Ausgehend vom aus Funktionentheorie 2 bekannten Fundamentalbereich $\mathcal{F}$ der Aktion von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}$ bestimmen wir die Fundamentalbereiche der Aktionen von allgemeinen Kongruenzuntergruppen und deren Volumina.[1] **Literatur: Abschnitt II.3.1-II.3.3 und IV.3.1 in [KK]. Die Berechnung des Indexes $[\Gamma(1) : \Gamma(n)]$ wird in Proposition 1.30 in [Kas] ausgeführt.**

4 Modulformen zu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 16. 5. 2013

Die aus Funktionentheorie 2 bekannte Theorie der Modulformen zu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ wird wiederholt und etwas vertieft. Genauer führen wir die Begriffe der Holomorphie bzw. Meromorphie in ∞ und der Modularität und Modulformen ein, zeigen die Valenzformel, führen Eisensteinreihen und die Diskriminante Δ als Beispiele für Modulformen ein, zeigen, dass der Raum der Modulformen von Eisensteinreihen erzeugt wird und folgern die Dimensionsformel daraus. Abschließend führen wir noch die j-Funktion als Beispiel einer Modulfunktion ein. **Literatur: Abschnitte I.2 und I.3 in [Lan]. Ergänzend kann auch die etwas ausführlichere Darstellung des gleichen Stoffs in Kapitel 3 von [Koh] betrachtet werden.** *Dieser Vortrag enthält sehr viel Stoff; das meiste sollte allerdings schon aus Funktionentheorie 2 bekannt sein. Ich bitte den Vortragenden, sich zur genauen Absprache an mich zu wenden.*

5 Dirichletreihen und Mellintransformation 23. 5. 2013

Eine (gewöhnliche) Dirichletreihe ist eine Reihe der Form

$$\sum_n a_n n^{-s},$$

wobei s eine komplexe Variable ist. Wir untersuchen kurz ganz allgemein das Konvergenzverhalten von Dirichletreihen,[2] um dann speziell zu einer Modulform f von Gewicht k eine solche einzuführen. Diese konvergiert für $\mathrm{Re}(s) > \frac{k}{2} + 1$ und lässt sich bis auf gut zu kontrollierende Faktoren durch die so genannte Mellintransformation aus f gewinnen. **Literatur: Die allgemeine Theorie zu Dirichletreihen findet sich in Abschnitt 1 von [Zag], die Anwendung auf Modulformen in den Abschnitten I.4-I.5 von [Lan].**

[1] Es wird nur das Volumen von $\mathcal{F}$ explizit berechnet; der allgemeine Fall folgt aber in trivialer Weise daraus.

[2] Diese konvergieren immer in einer geeigneten rechten Halbebene von $\mathbb{C}$.

6 Heckeoperatoren 6. 6. 2013

Zu jeder ganzen Zahl n definieren wir auf der freien abelschen Gruppe $\mathscr{L}$ der Gitter in $\mathbb{C}$ den n-ten Heckeoperator $T(n)$ durch die Zuordnung

$$T(n)(L) := \sum_{[L:L']=n} L' \qquad \text{für alle } L \in \mathscr{L}.$$

Wir studieren diese und ähnliche Operatoren und übersetzen sie in Operatoren auf dem Raum der Modulformen festen Gewichts. **Literatur: Abschnitt II.1 in [Lan]. Als weitere Lektüre ist auch Abschnitt IV.1 in [KK] interessant, wo die Heckeoperatoren allerdings etwas anders eingeführt werden.**

7 Eulerprodukte und L-Reihen 13. 6. 2013

Wir untersuchen bestimmte Rechenregeln, was uns darauf führt, dass die Fourierkoeffizienten einer Modulform, die simultane Eigenform zu allen Heckeoperatoren ist, nach geeigneter Normierung gerade die Heckeeigenwerte sind. Wir schließen daraus, dass die Dirichletreihe der Modulform eine Eulerproduktdarstellung besitzt. Wenn noch Zeit ist, kann an dieser Stelle auch gezeigt werden, dass die Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Eigenwerte einer Heckeeigenform unendlich viele Vorzeichenwechsel hat. **Literatur: Abschnitt II.2 in [Lan]. Für den optionalen Stoff halte ich Material bereit.**

8 Das Petersson'sche Skalarprodukt 20. 6. 2013

Als ein Integral über die in Vortrag 3 eingeführten Fundamentalbereiche mit dem dort definierten invarianten Volumenelement führen wir das Peterssonskalarprodukt auf dem Raum der Spitzenformen festen Gewichts ein. Wir zeigen, dass der Wert des Skalarprodukts nicht von der Wahl des Fundamentalbereichs abhängt und sich wohlverhält, wenn man zu Untergruppen übergeht. Außerdem sind die Heckeoperatoren selbstadjungiert unter dem Peterssonskalarprodukt, was uns abschließend ermöglicht, eine besondere Basis für den Raum der Spitzenformen festen Gewichts anzugeben. **Literatur: Abschnitte IV.3.1-IV.3.6 in [KK].**

9 Modulformen höherer Stufe 1 27. 6. 2013

Modulformen und Heckeoperatoren können nicht nur bezüglich der vollen Modulgruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eingeführt werden, sondern auch zu beliebigen Kongruenzuntergruppen. Um dies für die Gruppe $\Gamma_1(N)$ mit einem $N \in \mathbb{N}$ zu tun, müssen wir anstelle von Gittern Paare (t, L) betrachten, wobei L wie gewohnt ein Gitter und t einen Punkt auf dem Quotienten $\mathbb{C}/L$ von genauer Ordnung N bezeichne. **Literatur: Abschnitte VII.1-VII.2 in [Lan].**

10 Modulformen höherer Stufe 2 — 4. 7. 2013

In diesem Vortrag studieren wir zunächst die Wirkung von Heckeoperatoren auf der q-Entwicklung von Modulformen. Hierfür führen wir für alle $d \in \mathbb{N}_{>0}$ die nützlichen Hilfsoperatoren U_d und V_d ein. Das führt dazu, dass wir auch die Aktion von Heckeoperatoren auf Modulformen höherer Stufe in Form einer Spur ausdrücken können, wobei wir über ein geeignetes Vertretersystem von Matrizen aufsummieren. Wir schließen damit, dass wir das Peterssonskalarprodukt auch in dieser Situation untersuchen. **Literatur: Abschnitte VII.3-VII.5 in [Lan].**

11 Stufenwechsel — 11. 7. 2013

In den letzten drei Vorträgen wollen wir nun die Theorie von Atkin und Lehner studieren, die uns eine Zerlegung des Raums der Spitzenformen $S_k(N, \chi)$ in so genannte Alt- bzw. Neuformen liefert. Altformen sind hierbei Spitzenformen, die sich aus Formen einer Stufe $d \mid N$ gewinnen lassen, die Neuformen sind solche, die im Peterssonorthokomplement dazu liegen. Wir führen nun zunächst in dieser Theorie ein und studieren die dafür benötigte Frickeinvolution. **Literatur: Abschnitte VII.6 und VIII.1 in [Lan]. Eine Ausarbeitung hierzu findet sich in [Schm].**

12 + 13 Der Struktursatz — 18. 7. und 25. 7. 2013

Den Schlusspunkt unseres Seminars bildet schließlich der Struktursatz, auch Multiplizität-1-Satz genannt, der eine orthogonale Zerlegung des Raums der Spitzenformen in Heckeeigenräume liefert. Die Eigenräume, die zu den Neuformen gehören, kommen dabei mit Multiplizität 1 vor, was den Namen des Satzes erklärt. **Literatur: Abschnitte VIII.2-VIII.4 in [Lan]. Eine Ausarbeitung hierzu findet sich in [Schm].** *Den größten Teil dieses Themas nimmt der recht lange Beweis eines technischen Hilfssatzes ein (vgl. Abschnitt VIII.4), so dass mir eine befriedigende Aufteilung dieses Themas in zwei Vorträge schwer erschien. Ich schlage daher vor, dass sich zwei Vortragende die Aufgabe teilen.*

Literatur

[For] O. Forster. *Riemannsche Flächen*. Springer, 1977.

[Kas] H. Kasten. *Arithmetik automorpher Formen (Vorlesungsskriptum 2010)*.

[KK] M. Koecher, A. Krieg. *Elliptische Funktionen und Modulformen*. Springer, 1998.

[Koh] W. Kohnen. *Funktionentheorie 2 (Vorlesungsskriptum 2006)*.

[Lan] S. Lang. *Introduction to Modular Forms*. Springer, 1976.

[Schm] C.-G. Schmidt. *Modulfunktionen (Vorlesungsskriptum 2000)*.

[Zag] D. Zagier. *Zetafunktionen und quadratische Körper*. Springer, 1981.