Seminarprogramm Sommersemester 2012

Elementare Differentialgeometrie

Voraussetzungen: Analysis und Lineare Algebra.

Vorbesprechung: am 19. 4. 2012 um 14 Uhr ct in Hörsaal 3 des Mathematischen Instituts INF 288.

Vorträge

Unsere Hauptquelle ist das Buch [Bär] von Christian Bär. Soweit nicht anders angegeben beziehen sich Literaturangaben immer darauf. Im Text sind oft Aufgaben enthalten, für die es am Ende des Buches Lösungshinweise gibt. Diese sind Teil des Vortrags und sollen wie Propositionen behandelt werden.

1 Die Krümmung einer ebenen Kurve — 26. 4. 2012

Wir erinnern an die aus der Analysis bekannten Begriffe der ***parametrisierten Kurve***, der ***Kurve***, der ***Parametrisierung nach Bogenlänge*** und der ***Länge*** einer Kurve. Wir studieren nun den Spezialfall ***ebener Kurven***, also von Kurven im $\mathbb{R}^2$. Ähnlich wie in der Schulanalysis, aber mit einem kleinen zusätzlichen Trick, führen wir in jedem Punkt $t \in I$ die ***Krümmung*** $\kappa_c(t)$ einer parametrisierten ebenen Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2$ über deren zweite Ableitung ein. Wir zeigen die Frenetgleichungen und führen eine besondere Parametrisierung durch Sinus und Kosinus ein. **Literatur: Abschnitt 2.2 bis inklusive Lemma 2.2.5. Für die einführende Erinnerung kann Abschnitt 2.1 als Quelle herangezogen werden.**

2 Die Umlaufzahl einer ebenen Kurve — 3. 5. 2012

Vermöge der Parametrisierung des ersten Vortrags können wir die ***Umlaufzahl*** n_c der parametrisierten ebenen Kurve c definieren. In einem ersten Satz erkennen wir die Umlaufzahl als Integral

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int_I \kappa_c(t)dt$$

über die Krümmung. Höhe- und Schlusspunkt des Vortrags ist der Umlaufsatz, der besagt, dass einfach geschlossene ebene Kurven Umlaufzahl ± 1 haben. **Literatur: Abschnitt 2.2 von Definition 2.2.6 bis inklusive dem Beweis des Umlaufsatzes.**

3 Der Vierscheitelsatz 10. 5. 2012

Wir geben eine Definition für die ***Konvexität*** einer ebenen Kurve an und zeigen, dass sich diese gut an der Krümmung derselben ablesen lässt, wenn die Kurve nach der Bogenlänge parametrisiert und einfach geschlossen ist. Wir sagen, eine Kurve c habe einen ***Scheitel*** an der Stelle t, wenn die Ableitung $\dot{\kappa}_c$ der Krümmung in dieser Stelle verschwindet. Der Höhepunkt des Vortrags ist der Vierscheitelsatz, der besagt, dass eine periodische nach Bogenlänge parametrisierte konvexe ebene Kurve in ihrer Periode mindestens vier Scheitel aufweist. **Literatur: Abschnitt 2.2 von Definition 2.2.13 bis inklusive dem Beweis des Vierscheitelsatzes.**

4 Der Hauptsatz der Raumkurventheorie 24. 5. 2012

Bislang hatten wir uns ausschließlich mit ebenen Kurven befasst, also mit Kurven, deren Bild in $\mathbb{R}^2$ eingebettet war. Es liegt nahe zu versuchen, die dort erarbeitete Theorie auch auf ***Raumkurven*** zu erweitern, also auf Kurven, deren Bild in $\mathbb{R}^3$ eingebettet ist. So führen wir auch für Raumkurven die Begriffe der Krümmung und des Normalenvektors ein. Neu ist, dass sich diese mit dem ***Binormalenvektor*** zum ***begleitenden Dreibein*** der Kurve ergänzen lassen, und dass sich ganz ähnlich zur Krümmung noch die ***Windung*** einer Raumkurve einführen lässt. Wir zeigen die Frenet-Gleichungen, die das begleitende Dreibein mit seiner Ableitung in Beziehung setzen, und schließlich den Hauptsatz der Raumkurventheorie, der besagt, dass sich nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurven bis auf nachgeschaltete orientierungserhaltende euklidische Bewegungen eindeutig durch Krümmung und Windung bestimmen lassen. Wenn die Zeit noch reicht, schließen wir den Vortrag mit dem analogen Hauptsatz für ebene Kurven ab. **Literatur: Abschnitt 2.3 bis inklusive Aufgabe 2.17**

5 Der Totalwinkel 31. 5. 2012

Wir führen für geschlossene Polygone den ***Totalwinkel*** als Summe aller Winkel in den Eckpunkten ein. Das Hauptresultat dieses Vortrags ist, dass der Totalwinkel eines geschlossenen Polygons bei Hinzunahme eines weiteren Eckpunkts nie kleiner wird. Der Beweis dieser Aussage benutzt ein klein wenig sphärische Geometrie, die wir uns dafür aneignen. **Literatur: Abschnitt 2.3 ab nach Aufgabe 2.17 bis inklusive dem Beweis von Lemma 2.3.11, herauskopiertes Zusatzmaterial.**

6 Krümmungsapproximation durch Polygone 14. 6. 2012

In Analogie zum Totalwinkel eines Polygons definieren wir nun die ***Totalkrümmung*** einer periodischen nach Bogenlänge parametrisierten Kurve als das Integral über die Krümmung entlang der Kurve. Die Hauptaussage des Vortrags ist nun, dass sich die Totalkrümmung einer geschlossenen Raumkurve verstehen lässt als das Supremum der Totalwinkel aller Polygone, die sich der Kurve einbeschreiben lassen. Der Beweis ist recht technisch und benötigt die aus Analysis bekannte Tatsache, dass sich die Länge einer parametrisierten Kurve durch die Länge einbeschriebener Polygone approximieren lässt (vgl. Proposition 2.1.18). **Literatur: Abschnitt 2.3 ab Definition 2.3.12 bis inklusive dem Beweis von 2.3.13.**

7 Die Sätze von Fenchel und Fáry-Milnor 21. 6. 2012

Die Sätze von Fenchel bzw. von Fáry-Milnor geben darüber Auskunft, wie stark sich eine Raumkurve krümmen muss, damit sie sich schließen kann bzw. noch verknotet ist. Zu ihrem Beweis zählen wir die lokalen Maxima einer Raumkurve in eine fest vorgegebene Richtung. Ein erstes (und schwieriges) Ergebnis ist, dass die Totalkrümmung bis auf einen konstanten Vorfaktor gerade die Mittelung über alle diese Zahlen ist. Der Satz von Fenchel ist ein Korollar daraus und gibt eine Abschätzung der Totalkrümmung einer einfach geschlossenen Raumkurve. Zuletzt führen wir den Begriff der ***Isotopie*** ein und definieren, wann eine geschlossene Raumkurve ***verknotet*** bzw. ***unverknotet*** heißt. Der Satz von Fáry-Milnor liefert eine Abschätzung für die Totalkrümmung einer verknoteten einfach geschlossenen Raumkurve. **Literatur: Abschnitt 2.3 ab nach dem Beweis von 2.3.13.** *Dieser Vortrag ist eher großzügig zugeschnitten. Gegebenenfalls kann der Beweis des Satzes von Fáry-Milnor auch weggelassen werden.*

8 Reguläre Flächen 28. 6. 2012

In diesem Vortrag untersuchen wir ***reguläre Flächen*** und ihre ***lokalen Parametrisierungen***. Der Begriff des ***Diffeomorphismus*** wird eingeführt. **Literatur: Abschnitt 3.1.** *In diesem Abschnitt gibt es sehr viele Beispiele und Übungsaufgaben, die sicher nicht alle vorgeführt werden müssen. Ich bitte um Absprache mit dem Vortragenden.*

9 Die erste und die zweite Fundamentalform 5. 7. 2012

An eine reguläre Fläche im $\mathbb{R}^3$ kann man anschaulich in jedem Punkt eine ***Tangentialebene*** anlegen. Wir formalisieren dies, indem wir die Tangentialebene einführen als die Menge von Vektoren, die als Tangentialvektor einer in der Fläche verlaufenden glatten parametrisierten Kurve in einem Punkt P der Fläche vorkommen. Hier ist nicht offensichtlich, dass die Tangentialebene tatsächlich ein zweidimensionaler $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ ist; das zeigen wir aber direkt danach. Wir führen dann für glatte Abbildungen $f : S_1 \to S_2$ zwischen zwei regulären Flächen in jedem Punkt $P \in S_1$ das ***Differential*** $d_P f$ ein. Dieses ist wohldefiniert und linear. Die ***erste Fundamentalform*** ist dann die Einschränkung des Standardskalarprodukts von $\mathbb{R}^3$ auf die Tangentialebene. Wir definieren nun ***Normalenfelder*** auf einer regulären Fläche S als Abbildungen $N : S \to \mathbb{R}^3$, deren Bild für jeden Punkt $P \in S$ senkrecht auf der Tangentialebene steht. Sind zusätzlich alle Bildvektoren normiert, heißt ein Normalenfeld ein ***Einheitsnormalenfeld***. Gibt es auf einer regulären Fläche ein glattes Einheitsnormalenfeld, so heißt diese ***orientierbar***. Wir führen auf orientierbaren regulären Flächen die ***Gauß-Abbildung*** und die ***Weingarten-Abbildung*** ein und zeigen, dass die Weingarten-Abbildung bezüglich der ersten Fundamentalform selbstadjungiert ist. Der Vortrag endet mit dem Einführen der zweiten Fundamentalform. **Literatur: Abschnitte 3.2 bis 3.5.** *In den angegebenen Abschnitten gibt es sehr viele Beispiele und Übungsaufgaben, die angesichts der Stofffülle nicht alle vorgeführt werden können. Ich bitte um Absprache mit dem Vortragenden.*

10 Krümmung von Flächen 12. 7. 2012

Wir kommen nun zu einem zentralen Begriff der Flächentheorie und der Differentialgeometrie überhaupt: der Krümmung. Wir zerlegen hierfür die Krümmung von Raumkurven in regulären Flächen in einen tangentialen und einen normalen Anteil. Letzterer heißt die ***Normalkrümmung*** und beschreibt die Krümmung der Fläche im Raum. Der Satz von Meusnier zeigt uns, wie wir die Normalkrümmung mit der zweiten Fundamentalform bestimmen können. Da die Weingarten-Abbildung in unserem Fall selbstadjungiert ist, hat der Tangentialraum der Fläche eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. Dies nutzen wir, um die so genannten ***Hauptkrümmungen*** einzuführen. Durch Mittelung der Hauptkrümmungen erhält man die ***Gaußkrümmung*** bzw. die ***mittlere Krümmung***. **Literatur: Abschnitt 3.6 bis einschließlich Beispiel 3.6.14.**

11 Die geometrische Interpretation der Gaußkrümmung 19. 7. 2012

Das erste Ziel dieses Vortrags ist einzusehen, dass sich reguläre Flächen lokal als Graph über ihrer affinen Tangentialebene ansehen lassen. Dies erfordert einige Arbeit und das Studium spezieller lokaler Parametrisierungen. Der Aufwand lohnt sich aber, weil wir auf diese Weise beginnen können, über die Gaußkrümmung die lokale Geometrie der untersuchten Fläche zu beschreiben. Ein Beispiel eines solchen Resultats ist, dass eine reguläre Fläche mit nichtpositiver Gaußkrümmung nicht kompakt sein kann. **Literatur: Abschnitt 3.6 ab Satz 3.6.15.**

12 Minimalflächen 26. 7. 2012

Wir studieren, wann eine reellwertige Funktion auf einer regulären Fläche Lebesgue-integrierbar ist und führen das ***Flächenelement*** ein. Falls die konstante Funktion $f \equiv 1$ integrierbar ist, können wir so auch den ***Inhalt*** der gegebenen Fläche bestimmen. Abschließend untersuchen wir noch ***Minimalflächen***, also Flächen, deren Inhalt unter all denjenigen Flächen mit gegebenem Rand minimal ist. **Literatur: Abschnitt 3.7 und Abschnitt 3.8.2.** *Bei Interesse kann ich für diesen Vortrag noch nettes Anschauungsmaterial vermitteln.*

Literatur

[Bär] C. Bär. *Elementare Differentialgeometrie (2. Auflage)*. de Gruyter, 2010.