Seminarprogramm Sommersemester 2011

Algorithmische Geometrie

Voraussetzungen: Nur die Grundvorlesungen. Dieses Seminar richtet sich insbesondere an **Lehramtsstudenten**.

Vorbesprechung: am Donnerstag, dem 3. 2. 2011, um 13 Uhr c. t. in Hörsaal 5, INF 288.

Vorträge

1 Affine Varietäten — 14. 4. 2011

Wir wiederholen ein bisschen Theorie über Polynome und Polynomabbildungen und führen den Begriff des rationalen Funktionenkörpers ein. Schließlich studieren wir gemeinsame Nullstellenmengen von Mengen von Polynomen, so genannte „affine Varietäten" und bestimmte Parametrisierungen von diesen . Die behandelten Objekte sollen mit vielen Beispielen veranschaulicht werden. **Literatur: [Vog], Abschnitte 1 und 2**

2 Ideale im Polynomring — 21. 4. 2011

In diesem Vortrag werden Ideale in Polynomringen studiert. Natürlich behalten wir dabei die Geometrie im Blickfeld und werfen die Frage nach dem Zusammenhang zwischen Idealen und Varietäten auf. **Literatur: [Vog], Abschnitt 3**

3 Der euklidische Algorithmus — 28. 4. 2011

Da wir nun wissen, dass wir Polynome verstehen müssen, um Varietäten zu begreifen, studieren wir nun zunächst Polynome in einer Variablen. Wir zeigen, dass die aus den ganzen Zahlen bekannte Division mit Rest auch im Polynomring $K[X]$ über einem Körper funktioniert und folgern, dass alle Ideale im Polynomring $K[X]$ bereits von einem einzigen Polynom erzeugt werden. Dieses kann, wie wir zeigen werden, auch tatsächlich berechnet werden, und zwar mit dem euklidischen Algorithmus. **Literatur: [Vog], Abschnitt 4**

4 Monomordnungen auf $K[X_1, \ldots, X_n]$ 5. 5. 2011

Es liegt nun nahe zu versuchen, den euklidischen Algorithmus auf Polynome in mehreren Variablen anzupassen. Nun beruhte dieser aber wesentlich darauf, dass man den „Leitterm“ eines Polynoms in $K[X]$ kennt, das heißt man weiß, welches im Polynom vorkommende Monom bezüglich der kanonischen über den Grad gegebenen Ordnung „am größten“ ist. In diesem Vortrag wollen wir Ordnungen auf der Menge der Monome in $K[X_1, \ldots, X_n]$ untersuchen, um diesen Sachverhalt imitieren zu können. **Literatur: [Vog], Abschnitt 5**

5 Der Divisionsalgorithmus in $K[X_1, \ldots, X_n]$ 12. 5. 2011

Nach den Ergebnissen des letzten Vortrags beweisen wir nun eine „Division mit Rest“ in $K[X_1, \ldots, X_n]$ und führen diese anhand mehrerer Beispiele vor. **Literatur: [Vog], Abschnitt 6, und [CLO], Abschnitt 2.3**

6 Monomideale 19. 5. 2011

Nachdem wir die Schwierigkeit des uneindeutigen Leitkoeffizienten umschifft haben, wenden wir uns nun einem weiteren Problem beim Rechnen in $K[X_1, \ldots, X_n]$ zu; wir wollen nämlich zeigen, dass alle Ideale darin endlich erzeugt sind. In diesem Vortrag führen wir dazu die Monomideale ein, für die wir diese Behauptung zeigen können; das ist das Lemma von Dickson. **Literatur: [Vog], Abschnitt 7**

7 Hilberts Basissatz 26. 5. 2011

Durch einen Trick können wir dieselbe Aussage für beliebige Ideale auf diejenige für Monomideale aus dem letzten Vortrag zurückführen und somit den Hilbert'schen Basissatz zeigen. Wir führen den Begriff der Gröbnerbasis ein und benutzen ihn, um zu zeigen, dass sich die endliche Erzeugtheit von Idealen äquivalent auch als eine Kettenbedingung formulieren lässt. **Literatur: [Vog], Abschnitt 8**

8 Gröbnerbasen 9. 6. 2011

Wir untersuchen die im letzten Vortrag eingeführten Gröbnerbasen und zeigen insbesondere Kriterien, anhand derer man feststellen kann, ob eine Menge von Polynomen eine Gröbnerbasis eines gegebenen Ideals ist. **Literatur: [Vog], Abschnitt 9 ohne den Beweis der Behauptung auf den Seiten 43/44**

9 Der Buchbergeralgorithmus 16. 6. 2011

Der Buchbergeralgorithmus liefert zu einem durch seine Erzeuger gegebenen Ideal in $K[X_1, \dots, X_n]$ eine Gröbnerbasis. Wir zeigen dies mit dem Kriterium aus dem letzten Vortrag, das wir zuvor noch zu Ende beweisen. Wenn noch Zeit ist, berichten wir mündlich (kurz) über die in [CLO], Abschnitt 2.9, erwähnten Verbesserungsmöglichkeiten für den Buchbergeralgorithmus. **Literatur: [Vog], der im letzten Vortrag ausgelassene Beweis und [Vog], Theorem 10.1 mit Beweis und Beispiel 10.2.**

10 Reduzierte Gröbnerbasen 30. 6. 2011

Natürlich ist es schön, dass uns der Buchbergeralgorithmus zu jedem Ideal von $K[X_1, \dots, X_n]$ eine Gröbnerbasis liefert. Gröbnerbasen sind jedoch nicht eindeutig. Wenn man sich es aussuchen könnte, würde man selbstverständlich stets eine möglichst „einfache“ Gröbnerbasis erhalten, das heißt zum Beispiel, dass letztere eine minimale Elementanzahl haben soll. Wir führen in diesem Vortrag den Begriff der reduzierten Gröbnerbasis ein, zeigen, dass diese immer eindeutig sind und finden einen Algorithmus zu ihrer Bestimmung. **Literatur: [Vog], der Rest von Abschnitt 10**

11 Der Eliminationssatz 7. 7. 2011

Um ein Gleichungssystem zu lösen kann man unter günstigen Umständen einen Trick anwenden. Die Idee hierbei ist, ein schweres Problem durch zwei (hoffentlich) leichtere zu ersetzen. Kann man nämlich aus einem Satz von Polynomgleichungen mehrere Variablen eliminieren, so erhält man ein kleineres und daher einfacher zu lösendes Gleichungssystem. Die Lösungen dieses kleinen Systems setzt man in das ursprüngliche System ein und hat dieses damit verkleinert. Für die systematische Anwendung dieses Tricks gibt es zwei wesentliche Hindernisse: Zum einen muss man abklären, wann eine solche Elimination möglich ist, zum anderen, wie genau man die Lösungen des kleinen Systems zu Lösungen des ursprünglichen Systems fortsetzt. In diesem Vortrag werden wir die grundsätzliche Problematik beschreiben und das erste dieser zwei Hindernisse mit dem Eliminationssatz aus dem Weg räumen. **Literatur: [Vog], Abschnitt 11 bis inklusive Beispiel 11.7** *Dieser Vortrag ist vom Umfang eher dünn gehalten. Der Vortragende soll mich frühzeitig wegen möglichem Zusatzmaterial ansprechen.*

12 Der Fortsetzungssatz 14. 7. 2011

Folgerichtig kümmern wir uns in diesem Vortrag um das zweite angesprochene Hindernis. Den namensgebenden Fortsetzungssatz werden wir jedoch nicht beweisen (das wäre noch ziemlich aufwändig), sondern lediglich in eine geometrische Form überführen und anhand vieler Beispiele veranschaulichen. **Literatur: [Vog], der Rest von Abschnitt 11 und Abschnitt 12 bis inklusive Beispiel 12.5**

13 Hilberts Nullstellensatz 21. 7. 2011

Der letzte Vortrag bietet noch einmal ein besonders schönes Resultat. Mit dem (schwachen) Hilbert'schen Nullstellensatz können wir das Konsistenzproblem lösen, also (zumindest über algebraisch abgeschlossenen Körpern) zeigen, dass eine affine Varietät genau dann keine Punkte hat, wenn die zugehörige reduzierte Gröbnerbasis trivial ist. Wenn noch etwas Zeit ist, folgern wir auch die starke Formulierung des Nullstellensatzes, die uns sagt, wann genau ein Polynom an allen Punkten einer affinen Varietät verschwindet. **Literatur: [Vog], Abschnitt 16, eventuell exklusive Satz 16.7**

Literatur

[CLO] D. Cox, J. Little, D. O'Shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms*. Springer, 1992.

[Vog] D. Vogel. *Algorithmische Geometrie*. Vorlesungsskript, 2008.

Bemerkung: [Vog] stellt eine Ausarbeitung von [CLO] dar. Als Literatur verweise ich hier zumeist auf die meiner Meinung nach konzisere Darstellung von Vogel. Im Buch von Cox, Little und O'Shea sind allerdings noch eine Reihe von graphischen Beispielen, Einordnungen und Anwendungen enthalten, so dass sich ein Blick in den jeweiligen Abschnitt in [CLO] durchaus lohnt.