Proseminarprogramm Sommersemester 2018
Analysis

Voraussetzungen: Analysis 1.

Vorbesprechung: am Mittwoch, dem 7. 2. 2018, um 13 Uhr s.t.
in Seminarraum 4 im Mathematikon INF 205

Vorträge

Vortrag 1: Der Verdichtungssatz **(19. 4. 2018)**

Quelle: [Kno], §13 - 14 (ohne Aufgaben), und [Koe], Abschnitte II.2.1 - II.2.2

Zu Beginn des Vortrags erinnern wir an die Definition einer unendlichen Reihe, die Definition ihrer Konvergenz und das Quotienten- und das Wurzelkriterium. Wir führen nach [Koe] die Reihen $\zeta(s)$ ein und zeigen, dass die gerade wiederholten Konvergenzkriterien über deren Konvergenz nichts aussagen, vgl. §13 in [Kno]. Wir zeigen die „Konvergenztricks“ und das systematische Beheben dieses Problems mit dem Cauchy'schen Verdichtungssatz wie in [Koe] und verallgemeinern den Verdichtungssatz wie in [Kno]. Dort findet man auch noch eine Vielzahl von weiteren Reihen, deren Konvergenzverhalten wir jetzt verstehen.

Vortrag 2: Umordnung von Reihen **(26. 4. 2018)**

Quelle: [Heu], §32

Wir erinnern an bedingte und unbedingte Konvergenz von Reihen: Eine Umordnung einer Reihe $\sum_k a_k$ ist eine Reihe $\sum_k a_{\sigma(k)}$, wobei σ eine Permutation der natürlichen Zahlen ist. Man nennt eine konvergente Reihe mit Summe s ***unbedingt konvergent***, wenn jede ihrer Umordnungen ebenfalls gegen s konvergiert, ansonsten heißt sie ***bedingt konvergent***. Wir zeigen ein Beispiel einer bedingt konvergenten Reihe (vgl. [Kno], §16 Beispiel 84.2). Der Umordnungssatz besagt, dass eine Reihe genau dann unbedingt konvergiert, wenn sie absolut konvergiert. Jede bedingt konvergente Reihe kann darüber hinaus so umgeordnet werden, dass als Summe ein beliebiges vorher festgelegtes $s \in \mathbb{R}$ erreicht wird.

Vortrag 3: Summierbarkeit von Familien **(3. 5. 2018)**

Quelle: [Kön], §6.3 (ab der Definition der Familie)

Der Umordnungssatz des letzten Vortrags lässt sich noch in allgemeinerem Licht betrachten, indem wir untersuchen, wann so genannte ***Familien*** summierbar sind. Der Umordnungssatz des letzten Vortrags ist nach Einführen der richtigen Notation plötzlich fast trivial, nach dem Beweis eines Summierbarkeitskriteriums folgen dann auch der Große Umordnungssatz, der Doppelreihensatz und der Satz vom Cauchy-Produkt. Für alle genannten Aussagen sehen wir auch schlagkräftige Beispiele.

Vortrag 4: Das Konvergenzkriterium von Raabe (17. 5. 2018)

Quelle: [Heu], §33.10, und [Kno], §38

Der Text von Knopp ist hier etwas schwerer zugänglich. Der Vortragende sollte zunächst den Beweis des Konvergenzkriteriums bei Heuser studieren. Falls noch Zeit ist, kann der Vortrag (in Absprache mit mir) mit dem Gauß'schen Konvergenzkriterium abgerundet werden. Dies ist eine Verfeinerung des Quotientenkriteriums. Für die Binomialreihe $(1 + x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ liefert das Kriterium von Raabe eine Entscheidung über die Konvergenz in den Endpunkten $x = \pm 1$ des Konvergenzintervalls. In diesen Punkten bringt das Quotientenkriterium keine Entscheidung.

Vortrag 5: Die Konvergenzkriterien von Abel und Dirichlet (24. 5. 2018)

Quelle: [Kno], §43

Die bisherigen Konvergenzkriterien befassten sich allesamt mit der Frage nach absoluter Konvergenz. Was aber, wenn eine Reihe unendlich viele positive und unendlich viele negative Summanden hat und sich mit den bekannten Kriterien absolute Konvergenz nicht entscheiden lässt? Vermöge Abel'scher partieller Summation zeigen wir das Abel'sche Konvergenzkriterium, dass uns sagt, dass wir stets eine konvergente Reihe erhalten, wenn wir eine gegebene konvergente Reihe gliedweise mit einer monotonen und beschränkten Folge multiplizieren. Das Kriterium von Dirichlet ist eine Variante davon und impliziert das bekannte Leibnitzkriterium für alternierende Reihen.

Vortrag 6: Der Abel'sche Grenzwertsatz (7. 6. 2018)

Quelle: [Heu], §65

Eine Potenzreihe stellt im Inneren ihres Konvergenzintervalls eine stetige (sogar eine beliebig oft differenzierbare) Funktion dar. Der Abel'sche Grenzwertsatz besagt, dass sich diese Funktion stetig auf den Rand des Konvergenzintervalls fortsetzen lässt und auch dort durch die ursprüngliche Reihe gegeben ist, falls letztere in dem jeweiligen Randpunkt konvergiert. Aus dem Satz ergibt sich sofort eine Vielzahl von reizvollen Beispielen, wie etwa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log(2) \quad \text{oder} \quad \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} = \frac{\pi}{4},$$

von denen im Vortrag einige vorgeführt werden sollen.

Vortrag 7: Division von Potenzreihen (14. 6. 2018)

Quelle: [Heu], §66

Für eine stetige Funktion f mit $f(x_0) \neq 0$ in einem Punkt x_0 ihres Definitionsbereichs ist ihr Kehrwert $1/f$ in einer Umgebung von x_0 definiert und stetig. Besitzt f um x_0 eine Potenzreihendarstellung, dann besitzt auch $1/f$ in einer kleinen Umgebung von x_0 eine solche. Für die Koeffizienten von $1/f$ gilt eine Rekursionsformel. Nun können wir Potenzreihen multiplizieren und invertieren, insgesamt also auch Potenzreihen durcheinander teilen. Als Beispiel berechnen wir aus den Potenzreihen von Sinus und Kosinus die ersten Koeffizienten der Reihen von Tangens und Kotangens.

Vortrag 8: Bernoullizahlen und -polynome (21. 6. 2018)

Quelle: [Heu], §71, und [Kön], §14.3. Ein Beweis der Kotangensverdopplung kann in [Koe], Abschnitt V.5.1, gefunden werden.

Mit den Methoden des letzten Vortrags können wir $\frac{x}{e^x-1}$ um $x = 0$ in eine Potenzreihe entwickeln. Die ***Bernoullizahlen*** sind im Wesentlichen die Koeffizienten dieser Reihe. Mit ihnen erhalten wir komplette Reihenentwicklungen für den Tangens und den Kotangens. Eng verwandt mit den Bernoullizahlen sind die ***Bernoullipolynome***, mithilfe derer wir Summen der Form

$$1^k + 2^k + \ldots + n^k$$

beschreiben können.

Vortrag 9: Die Partialbruchentwicklung des Kotangens (28. 6. 2018)

Quelle: [Koe], Abschnitte V.5.1-V.5.5

In diesem Vortrag berechnen wir die namensgebende Partialbruchentwicklung des Kotangens und erhalten so eine Reihendarstellung dieser Funktion. Andererseits hatten wir im letzten Vortrag bereits die Potenzreihendarstellung des Kotangens berechnet. Wir können diese beiden Reihendarstellungen koeffizientenweise vergleichen und erhalten als Ergebnis konkrete Werte für die ***Riemann'sche Zetafunktion*** an den geraden natürlichen Zahlen.

Vortrag 10: Uneigentliche Integrale (5. 7. 2018)

Quelle: [Kön], §11.9

Uneigentliche Integrale wie

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx \quad \text{oder} \quad \int_0^\infty e^{-x} dx$$

sind keine Riemannintegrale, da der Integrand bzw. das Integrationsintervall unbeschränkt sind. Unter geeigneten Voraussetzungen existieren uneigentliche Integrale jedoch als Grenzwerte von Riemannintegralen. Wir studieren eine Reihe von Beispielen für diesen Sachverhalt (das müssen nicht alle in [Kön] behandelten sein!) und führen als unser Hauptbeispiel die ***Gammafunktion*** ein. Wir zeigen das Integralkriterium, dass die Konvergenz einer unendlichen Reihe mit der Konvergenz eines uneigentlichen Integrals in Zusammenhang bringt, und lernen insbesondere die ***Euler-Mascheroni-Konstante*** γ kennen.

Vortrag 11: Die Euler'sche Summationsformel (12. 7. 2018)

Quelle: [Kön], §11.10 bis einschließlich der Berechnung der Euler-Mascheroni-Konstante

Wir nähern endliche Summen der Form $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ durch die zugehörigen Integrale $\int_1^n f(x)dx$ an. Für hinreichend oft differenzierbares f erhalten wir so eine Formel für die Differenz zwischen der Summe und dem Integral. In dieser Formel treten wieder die Bernoullipolynome auf. Als eine Anwendung können wir für $f(x) = \frac{1}{x}$ die Euler-Mascheroni-Konstante berechnen.

Vortrag 12: Die Stirlingformel (19. 7. 2018)

Quelle: [Heu], §94, und der Rest von [Kön], §11.10

Das asymptotische Verhalten von $n!$ für $n \to \infty$ wird durch die Stirling'sche Formel beschrieben. Zum Beweis benutzt man die Euler'sche Summationsformel für $f(x) = \log(x)$ und das Wallisprodukt. Als Ausblick kann noch kurz auf die Stirlingformel für die Gammafunktion hingewiesen werden, die sich aus der gezeigten Stirlingformel vermittels des Eindeutigkeitssatzes für die Gammafunktion herleiten lässt, vgl. etwa Abschnitt VI.7 in [Koe].

Literatur

[Heu] H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*. Teubner, 2003.

[Kno] K. Knopp. *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*. Springer, 1964.

[Koe] M. Koecher. *Klassische elementare Analysis*. Birkhäuser, 1987.

[Kön] K. Königsberger. *Analysis 1*. Springer, 1999.