Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dres. Eric Hofmann und Hendrik Kasten 17. 5. 2016

# Riemann'sche Flächen – Übungsblatt 4

## Aufgabe 1

Seien $\gamma, \tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{C}^\times$ zwei stückweise glatte Kurven mit selben Anfangs- und Endpunkt $z_0 \in \mathbb{C}^\times$. Benutzen Sie die Überlagerungseigenschaften der Abbildung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ um zu zeigen, dass $\gamma$ und $\tilde{\gamma}$ genau dann in $\mathbb{C}^\times$ homotop sind, wenn

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_{\tilde{\gamma}} \frac{\mathrm{d}z}{z}$$

gilt.

## Aufgabe 2

Seien $X, Y$ nichtleere Riemann'sche Flächen, und sei $f \in \mathrm{Hol}(X,Y)$. In Verallgemeinerung der Definition aus der Vorlesung heißt $f$ eine ***Überlagerung***, wenn für alle $y \in Y$ Karten $\psi : U' \to V'$ von $y$ und $\phi_i : U_i \to V_i$ von $x_i \in f^{-1}(y)$ existieren, so dass

$$f^{-1}(U') = \bigsqcup_i U_i$$

die disjunkte Vereinigung der $U_i$ ist, $f(U_i) = V$ gilt und $f$ in den Karten die Darstellung

$$\psi \circ f \circ \phi_i^{-1} : \begin{cases} \phi_i(U_i) & \to \psi(U'), \\ z & \mapsto z^{k_i} \end{cases}$$

mit einem $k_i \in \mathbb{N}$ hat. Die Definition aus der Vorlesung ergibt sich im Spezialfall $k_i = 1$ für alle $i$.

Wir wollen ein Kriterium dafür angeben, wann die holomorphe Abbildung $f$ eine Überlagerung ist. Hierfür führen wir noch zwei weitere Begriffe ein: Wir sagen $f \in \mathrm{Hol}(X,Y)$ sei ***eigentlich***, falls das Urbild jedes Kompaktums in $Y$ kompakt in $X$ ist, und ***endlich***, falls $f$ eigentlich ist und für jeden Punkt $y \in Y$ die Faser $f^{-1}(y)$ endlich ist. Zeigen Sie nun die folgenden Aussagen.

(a) $f \in \mathrm{Hol}(X,Y)$ ist genau dann endlich, wenn $f$ eigentlich und nichtkonstant ist.

(b) Ist $f \in \mathrm{Hol}(X,Y)$ endlich, so ist $f$ eine Überlagerung.

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am Montag, dem 23. 5. 2016, um 13 Uhr s.t. besprochen.