Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dres. Eric Hofmann und Hendrik Kasten

2. 5. 2016

Riemann'sche Flächen – Übungsblatt 2

Aufgabe 1

Sei $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ ein fest gewähltes Gitter.

(a) Zeigen Sie $(\wp_\Lambda)'''(z) = 12\,\wp_\Lambda(z)(\wp_\Lambda)'(z)$.

(b) Bestimmen Sie ein Polynom $P \in \mathbb{C}[X,Y] \setminus \{0\}$ mit der Eigenschaft $P\big((\wp_\Lambda)', (\wp_\Lambda)''\big) = 0$.

(c) Zeigen Sie $K(\Lambda) = \mathbb{C}\big((\wp_\Lambda)'\big) \oplus \mathbb{C}\big((\wp_\Lambda)'\big)\,\wp_\Lambda \oplus \mathbb{C}\big((\wp_\Lambda)'\big)\,\wp_\Lambda^2$.

Aufgabe 2

(a) Sei $f : X \to Y$ eine nichtkonstante holomorphe Abbildung zwischen kompakten Riemann'schen Flächen. Zeigen Sie die Existenz einer endlichen Teilmenge $A \subseteq X$, für die die Einschränkung

$$p := f|_{X \setminus A} : X \setminus A \to Y \setminus f(A)$$

die folgende topologische Eigenschaft hat.

(∗) Für jeden Punkt $y \in Y \setminus f(A)$ gibt es eine offene Umgebung $\mathcal{U} \subseteq Y$ und offene disjunkte Teilmengen $\mathcal{V}_i \subseteq X \setminus A$, wobei i durch eine geeignete Indexmenge läuft, so dass

$$p^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{V}_i,$$

gilt und alle Einschränkungen $p|_{\mathcal{V}_i} : \mathcal{V}_i \to \mathcal{U}$ Homöomorphismen sind.

(b) Geben Sie ein Beispiel kompakter Riemann'scher Flächen X und Y, einer endlichen Teilmenge $A \subseteq X$ und einer nichtkonstanten holomorphen Abbildung $p : X \setminus A \to Y \setminus f(A)$ an, sodass p die Eigenschaft $(\ast)$ erfüllt, aber nicht zu einer holomorphen Abbildung $X \to Y$ fortgesetzt werden kann.

Aufgabe 3

Seien X und Y kompakte Riemann'sche Flächen und $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$ je endliche Teilmengen. Zeigen Sie, dass jede konforme Abbildung $f : X \setminus A \to Y \setminus B$ Riemann'scher Flächen zu einer konformen Abbildung $\widetilde{f} : X \to Y$ fortgesetzt werden kann.

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am Montag, dem 9. 5. 2016, um 13 Uhr s.t. besprochen.