Universität Heidelberg 25. 4. 2016
Mathematisches Institut
Dres. Eric Hofmann und Hendrik Kasten

Riemann'sche Flächen – Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei $\mathbb{P}^n$ die Menge der eindimensionalen komplexen Untervektorräume von $\mathbb{C}^{n+1}$. Der durch den Vektor $0 \neq (z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$ aufgespannte $\mathbb{C}$-Untervektorraum von $\mathbb{C}^{n+1}$ wird im Folgenden mit $[z_1 : \ldots : z_{n+1}] \in \mathbb{P}^n$ bezeichnet. Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} &[z_1 : \ldots : z_{n+1}] = [z_1' : \ldots : z_{n+1}'] \text{ in } \mathbb{P}^n \\ \Longleftrightarrow\ &\text{es gibt ein } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ mit } (z_1, \ldots, z_{n+1}) = \lambda \cdot (z_1', \ldots, z_{n+1}'). \end{aligned}$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Für $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ bezeichne $U_i \subseteq \mathbb{P}^n$ die Menge aller eindimensionalen komplexen Untervektorräume $\mathbb{C}^{n+1}$, die *nicht* in der durch $z_i = 0$ gegebenen Hyperebene von $\mathbb{C}^{n+1}$ liegen. Dann gilt $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i$, und es existieren bijektive Abbildungen

$$\varphi_i : \begin{cases} U_i & \to \mathbb{C}^n, \\ [z_1 : \ldots : z_{n+1}] & \mapsto \left(\frac{z_1}{z_i}, \ldots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \ldots, \frac{z_{n+1}}{z_i}\right). \end{cases}$$

(b) Die Teilmenge

$$\{\varphi_i^{-1}(V) \mid V \subseteq \mathbb{C}^n \text{ offen}, i \in \{1, \ldots, n+1\}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{P}^n)$$

definiert eine Topologie† auf der Menge $\mathbb{P}^n$. Letztere wird dadurch zu einem kompakten, zusammenhängenden Hausdorffraum und die Abbildungen $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^n$ sind Homöomorphismen.

(c) Die Menge $\mathcal{A} := \{\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^n \mid i \in \{1, \ldots, n+1\}\}$ ist ein konformer Atlas auf $\mathbb{P}^n$.

(d) Die so definierte Riemann'sche Fläche $\mathbb{P}^1$ ist konform äquivalent zur Riemann'schen Zahlenkugel $\overline{\mathbb{C}}$.

Aufgabe 2

Als Gebiete in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ sind die offene Einheitskreisscheibe

$$\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

und $\mathbb{C}$ selbst Beispiele Riemann'scher Flächen. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}$ und $\mathbb{C}$ als topologische Räume homöomorph, jedoch nicht als Riemann'sche Flächen konform äquivalent sind.

Aufgabe 3

Sei $f \in \mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}})$ eine meromorphe Funktion auf der Riemann'schen Zahlenkugel. Zeigen Sie, dass es dann Polynome $p, q \in \mathbb{C}[X]$ gibt mit

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } q(z) \neq 0.$$

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am Montag, dem 9. 5. 2016, um 13 Uhr s.t. besprochen. Die Übung am 2. 5. 2016 entfällt.

† Sei X eine Menge und $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$. Dann definiert $\mathcal{S}$ auf X dadurch eine Topologie, dass genau diejenigen Teilmengen von X als offen gesetzt werden, die sich als beliebige Vereinigung von endlichen Schnitten von Elementen aus $\mathcal{S}$ schreiben lassen. $\mathcal{S}$ wird dann als *Subbasis* dieser Topologie bezeichnet.