Uma introdução à Topologia e à Teoria de Nós

José Pedro Quintanilha

Universität Regensburg

15 de Abril de 2019

O que é Topologia?

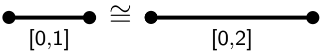
O que é Topologia?

Estudo de “espaços a menos de deformação contínua”.

O que é Topologia?

Estudo de “espaços a menos de deformação contínua”.

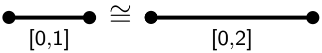
“Topologia não vê distâncias.”



O que é Topologia?

Estudo de “espaços a menos de deformação contínua”.

“Topologia não vê distâncias.”

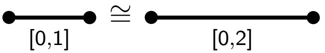


“homeomorfismo”

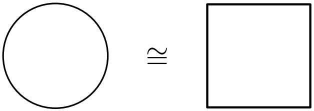
O que é Topologia?

Estudo de "espaços a menos de deformação contínua".

"Topologia não vê distâncias."



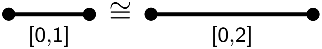
"homeomorfismo"



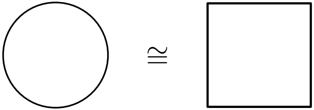
Estudo de “espaços a menos de deformação contínua”.

“Topologia não vê distâncias.”

“Geometria de borracha / plasticina”



“homeomorfismo”



Henry Segerman, *Topology Joke*

O que vê a Topologia?

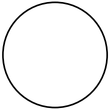
$$[0,1] \quad \ncong \quad [0,1] \cup [2,3]$$

O intervalo $[0,1]$ é conexo.

O que vê a Topologia?

$[0,1] \not\cong [0,1] \cup [2,3]$

O intervalo $[0,1]$ é conexo.

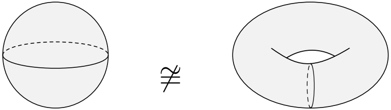


$\mathbb{S}^1$

$\not\cong$

$[0,1]$

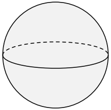
É impossível desconectar $\mathbb{S}^1$ removendo apenas um ponto.



$$\mathbb{S}^2 \ncong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$$

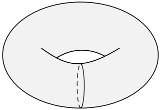
Qualquer curva fechada na esfera $\mathbb{S}^2$ separa-a em duas regiões.

O que vê a Topologia?



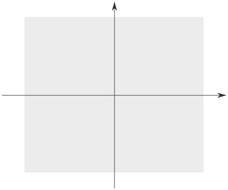
$\mathbb{S}^2$

$\ncong$



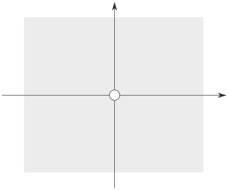
$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

Qualquer curva fechada na esfera $\mathbb{S}^2$ separa-a em duas regiões.



$\mathbb{R}^2$

$\ncong$



$\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$

É possível "dar voltas" a $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$.

Como fazer topologia

Como fazer topologia

Objetivo: classificar / descrever:

- Espaços topológicos:
  - Variedades (suaves)
  - Complexos-CW
  - Fibrados vetoriais
  - Grupos de Lie
  - ...
- Subespaços
- Funções contínuas
  - a menos de homotopia / isotopia?
- ...

Como fazer topologia

Objetivo: classificar / descrever:

- Espaços topológicos:
  - Variedades (suaves)
  - Complexos-CW
  - Fibrados vetoriais
  - Grupos de Lie
  - ...
- Subespaços
- Funções contínuas
  - a menos de homotopia / isotopia?
- ...

(difícil!!)

Como fazer topologia

Objetivo: classificar / descrever:

- Espaços topológicos:
  - Variedades (suaves)
  - Complexos-CW
  - Fibrados vetoriais
  - Grupos de Lie
  - ...
- Subespaços
- Funções contínuas
  - a menos de homotopia / isotopia?
- ...

(difícil!!)

Estratégia: Associar-lhes invariantes (algébricos):

- Números
- Grupos
- Grupos abelianos
- Anéis
- Espaços vetoriais
- Módulos
- Polinómios
- ...

Como fazer topologia

Objetivo: classificar / descrever:

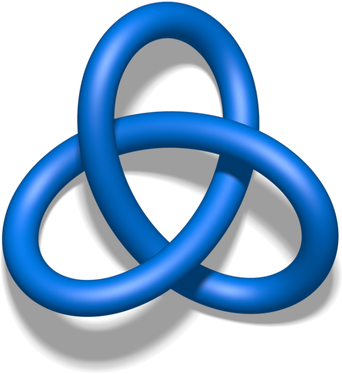
- Espaços topológicos:
  - Variedades (suaves)
  - Complexos-CW
  - Fibrados vetoriais
  - Grupos de Lie
  - ...
- Subespaços
- Funções contínuas
  - a menos de homotopia / isotopia?
- ...

(difícil!!)

Estratégia: Associar-lhes invariantes (algébricos):

- Números
- Grupos
- Grupos abelianos
- Anéis
- Espaços vetoriais
- Módulos
- Polinómios
- ...

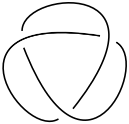
(difícil!)



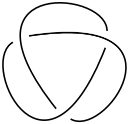
"Definição"

Um **nó** *é uma curva fechada em* $\mathbb{R}^3$ *sem auto-interseções**

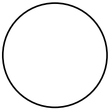
Nó de trevo direito



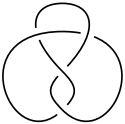
Nó de trevo esquerdo



Nó trivial



Nó em oito

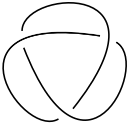


* Em rigor: uma sub-variedade suave difeomorfa a $\mathbb{S}^1$.

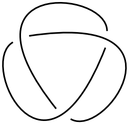
“Definição”

Um **nó** *é uma curva fechada em $\mathbb{R}^3$ sem auto-interseções*, a menos de “deformação sem auto-interseções”**.*

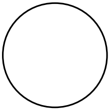
Nó de trevo direito



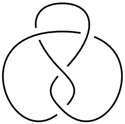
Nó de trevo esquerdo



Nó trivial



Nó em oito



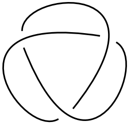
* Em rigor: uma sub-variedade suave difeomorfa a $\mathbb{S}^1$.

** Em rigor: a menos de isotopia suave do espaço ambiente $\mathbb{R}^3$.

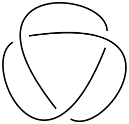
“Definição”

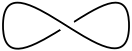
Um ***nó*** *é uma curva fechada em* $\mathbb{R}^3$ *sem auto-interseções*, a menos de “deformação sem auto-interseções”**.*

Nó de trevo direito

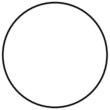


Nó de trevo esquerdo

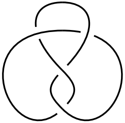




Nó trivial



Nó em oito



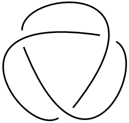
* Em rigor: uma sub-variedade suave difeomorfa a $\mathbb{S}^1$.

** Em rigor: a menos de isotopia suave do espaço ambiente $\mathbb{R}^3$.

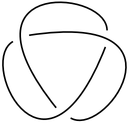
“Definição”

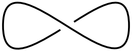
*Um **nó** é uma curva fechada em $\mathbb{R}^3$ sem auto-interseções*, a menos de “deformação sem auto-interseções”**.*

Nó de trevo direito

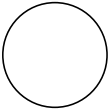


Nó de trevo esquerdo

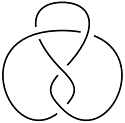


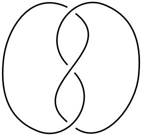


Nó trivial



Nó em oito



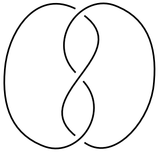


* Em rigor: uma sub-variedade suave difeomorfa a $\mathbb{S}^1$.

** Em rigor: a menos de isotopia suave do espaço ambiente $\mathbb{R}^3$.

"Definição"

Um **nó** *é uma curva fechada em* $\mathbb{R}^3$ *sem auto-interseções*, a menos de "deformação sem auto-interseções"**.*

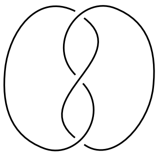


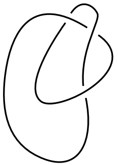
* Em rigor: uma sub-variedade suave difeomorfa a $\mathbb{S}^1$.

** Em rigor: a menos de isotopia suave do espaço ambiente $\mathbb{R}^3$.

"Definição"

Um **nó** *é uma curva fechada em* $\mathbb{R}^3$ *sem auto-interseções*, a menos de "deformação sem auto-interseções"**.*



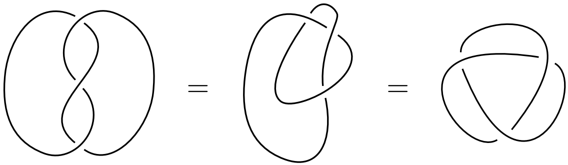


* Em rigor: uma sub-variedade suave difeomorfa a $\mathbb{S}^1$.

** Em rigor: a menos de isotopia suave do espaço ambiente $\mathbb{R}^3$.

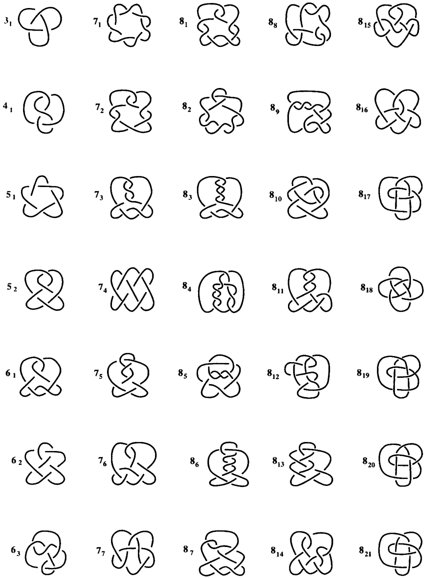
“Definição”

Um **nó** *é uma curva fechada em $\mathbb{R}^3$ sem auto-interseções*, a menos de “deformação sem auto-interseções”**.*



* Em rigor: uma sub-variedade suave difeomorfa a $\mathbb{S}^1$.

** Em rigor: a menos de isotopia suave do espaço ambiente $\mathbb{R}^3$.



Lickorish, *An Introduction to Knot Theory*

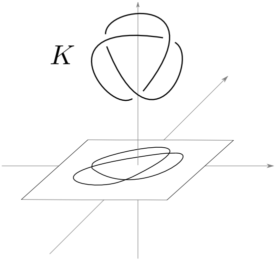
Definição

Um **diagrama** *para um nó K é a seguinte informação:*

Definição

Um **diagrama** *para um nó K é a seguinte informação:*

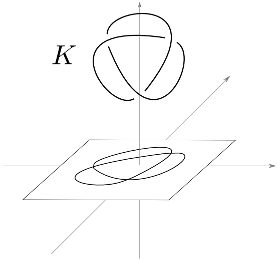
- *a imagem de (um representante de) K pela projeção no plano $z = 0$*



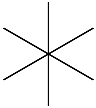
Definição

Um **diagrama** *para um nó K é a seguinte informação:*

- *a imagem de (um representante de) K pela projeção no plano $z = 0$, tal que todas as auto-interseções desta curva envolvem no máximo dois segmentos*



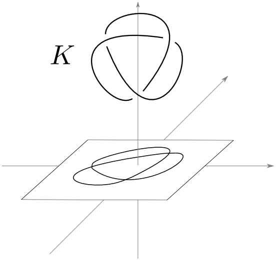
Proibido:



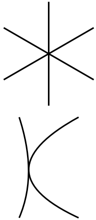
Definição

Um **diagrama** *para um nó K é a seguinte informação:*

- *a imagem de (um representante de) K pela projeção no plano $z = 0$, tal que todas as auto-interseções desta curva envolvem no máximo dois segmentos, e são transversais*



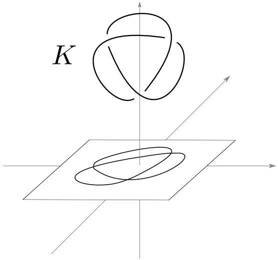
Proibido:



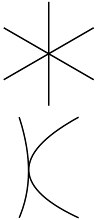
Definição

Um **diagrama** *para um nó K é a seguinte informação:*

- *a imagem de (um representante de) K pela projeção no plano $z = 0$, tal que todas as auto-interseções desta curva envolvem no máximo dois segmentos, e são transversais*;*



Proibido:

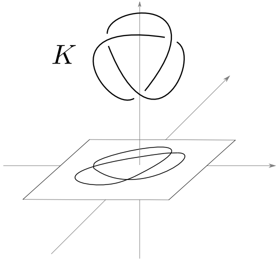


* É sempre possível encontrar um tal representante.

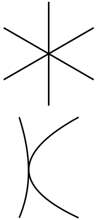
Definição

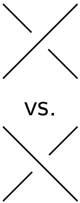
Um **diagrama** *para um nó K é a seguinte informação:*

- *a imagem de (um representante de) K pela projeção no plano $z = 0$, tal que todas as auto-interseções desta curva envolvem no máximo dois segmentos, e são transversais*;*
- *para cada auto-interseção, informação sobre qual dos dois pontos de K na pré-imagem tem maior cota.*



Proibido:



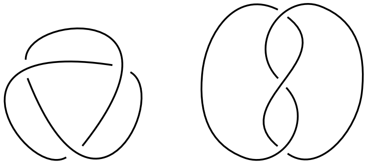


* É sempre possível encontrar um tal representante.

Qualquer nó é determinado por um dos seus diagramas. . .

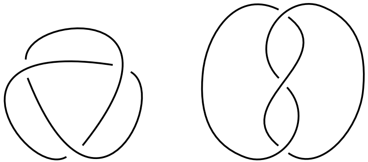
Qualquer nó é determinado por um dos seus diagramas. . .

. . . mas diagramas diferentes podem representar o mesmo nó.



Qualquer nó é determinado por um dos seus diagramas. . .

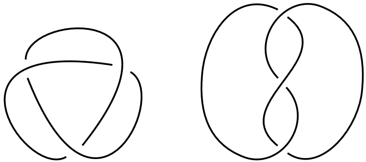
. . . mas diagramas diferentes podem representar o mesmo nó.



Questão fundamental: Dados dois diagramas, como determinar se representam o mesmo nó?

Qualquer nó é determinado por um dos seus diagramas...

...mas diagramas diferentes podem representar o mesmo nó.



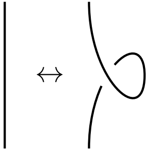
Questão fundamental: Dados dois diagramas, como determinar se representam o mesmo nó?

Como se relacionam dois diagramas para um mesmo nó?

Consideremos os seguintes **movimentos de Reidemeister**:

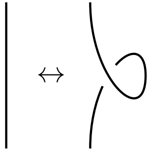
Consideremos os seguintes **movimentos de Reidemeister**:

Tipo I

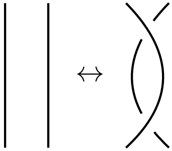


Consideremos os seguintes **movimentos de Reidemeister**:

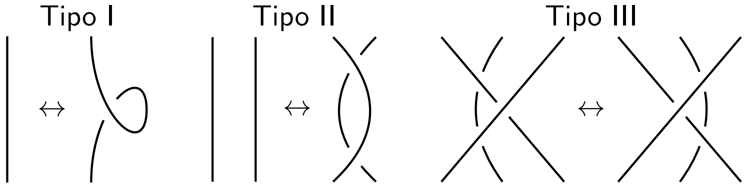
Tipo I



Tipo II

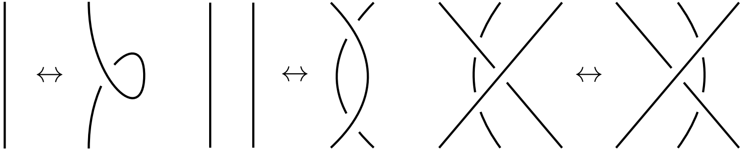


Consideremos os seguintes **movimentos de Reidemeister**:



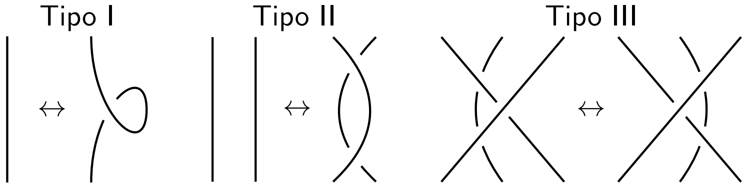
Consideremos os seguintes **movimentos de Reidemeister**:

Tipo I Tipo II Tipo III



Alterar um diagrama por um movimento de Reidemeister não muda o nó representado.

Consideremos os seguintes **movimentos de Reidemeister**:

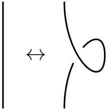


Alterar um diagrama por um movimento de Reidemeister não muda o nó representado.

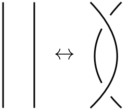
Teorema (Reidemeister)

Quaisquer dois diagramas para um mesmo nó diferem por uma sequência de movimentos de Reidemeister (e "deformações" do plano).

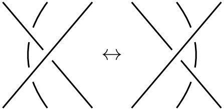
Tipo I



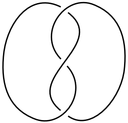
Tipo II



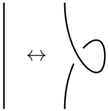
Tipo III



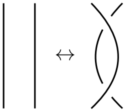
Exemplo:



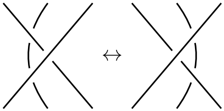
Tipo I



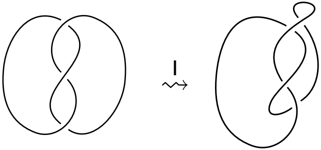
Tipo II



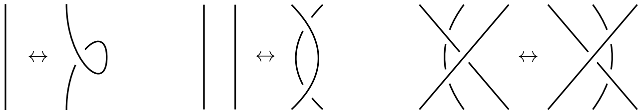
Tipo III



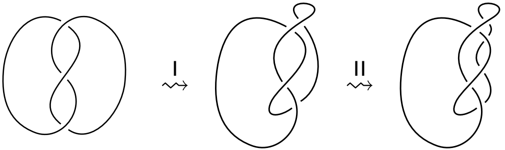
Exemplo:

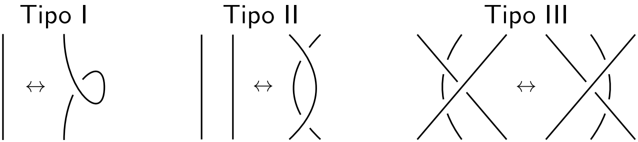


Tipo I Tipo II Tipo III

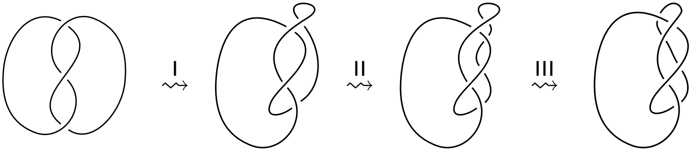


Exemplo:

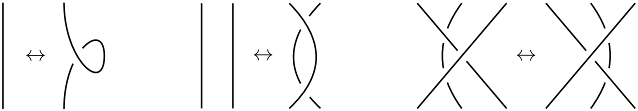




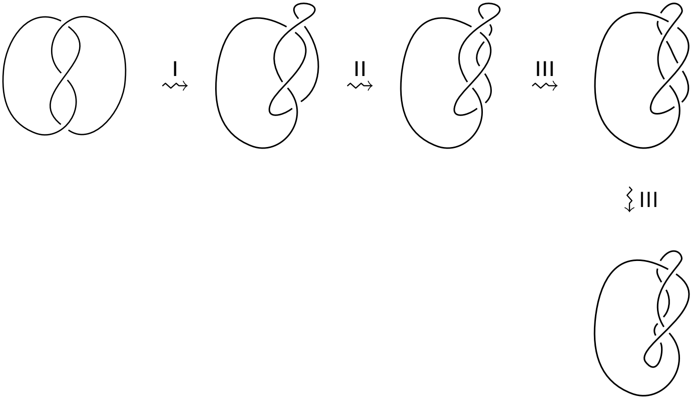
Exemplo:

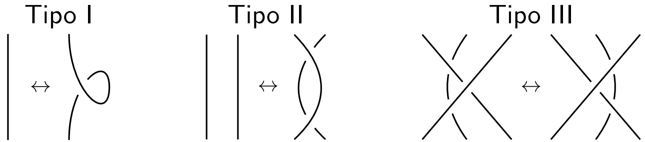


Tipo I Tipo II Tipo III

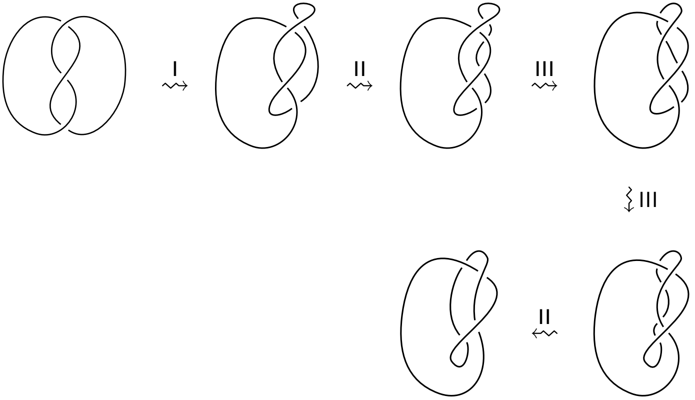


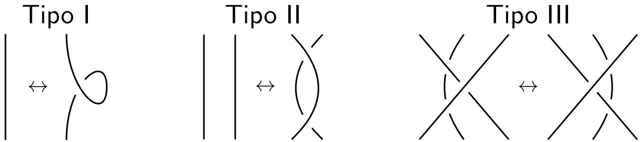
Exemplo:



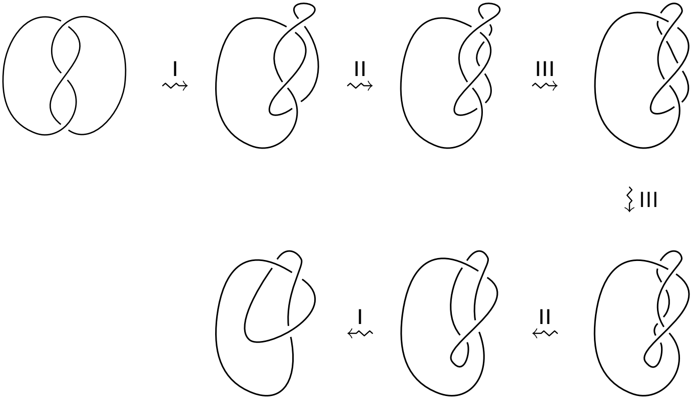


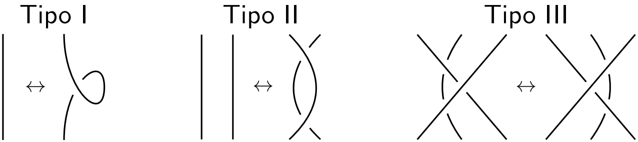
Exemplo:



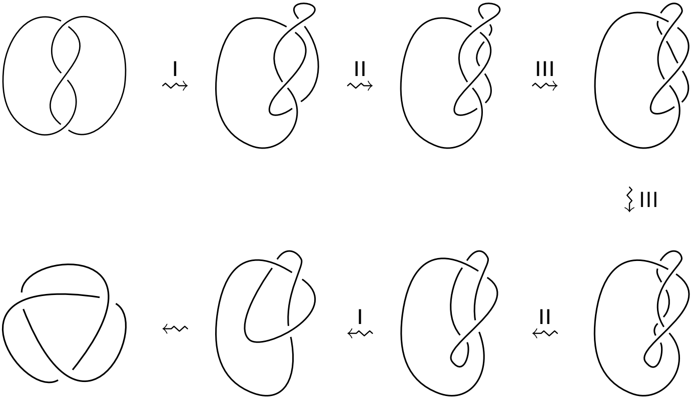


Exemplo:





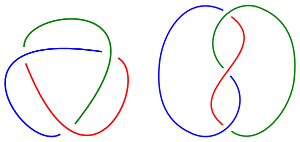
Exemplo:



Definição

Um diagrama diz-se **tricolor** *se for possível pintar cada* **arco** *com uma de três cores (vermelho, verde, azul)*

Exemplos:

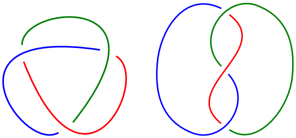


Definição

Um diagrama diz-se **tricolor** *se for possível pintar cada* **arco** *com uma de três cores (vermelho, verde, azul), de tal modo que:*

- *não pintamos todos os arcos da mesma cor,*

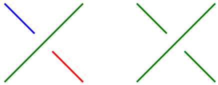
Exemplos:



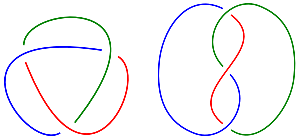
Definição

Um diagrama diz-se **tricolor** *se for possível pintar cada* **arco** *com uma de três cores (vermelho, verde, azul), de tal modo que:*

- *não pintamos todos os arcos da mesma cor,*
- *em cada cruzamento ocorre uma das seguintes possiblidades:*
  - *os arcos envolvidos são todos de cor diferente,*
  - *os arcos envolvidos são todos da mesma cor.*

Permitido: 

Exemplos:

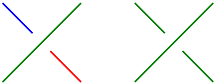


Definição

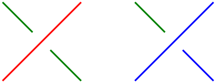
Um diagrama diz-se **tricolor** *se for possível pintar cada* **arco** *com uma de três cores (vermelho, verde, azul), de tal modo que:*

- *não pintamos todos os arcos da mesma cor,*
- *em cada cruzamento ocorre uma das seguintes possiblidades:*
  - *os arcos envolvidos são todos de cor diferente,*
  - *os arcos envolvidos são todos da mesma cor.*

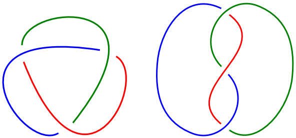
Permitido:



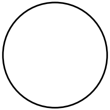
Proibido:



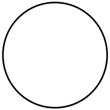
Exemplos:

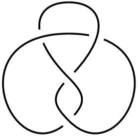


Não-exemplos:

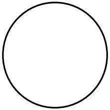


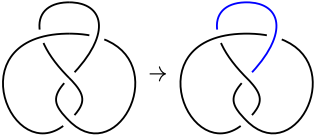
Não-exemplos:



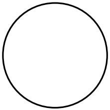


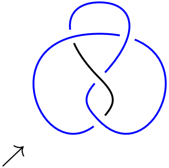
Não-exemplos:

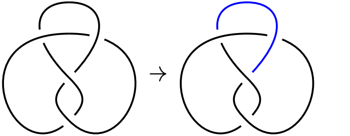




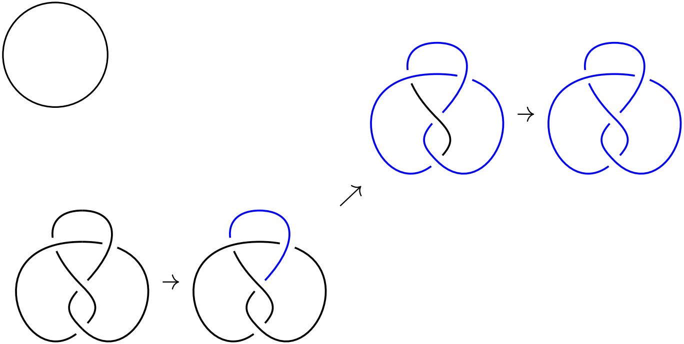
Não-exemplos:



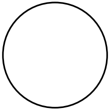


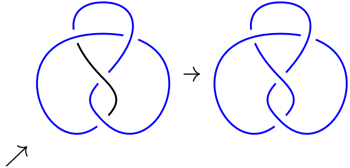


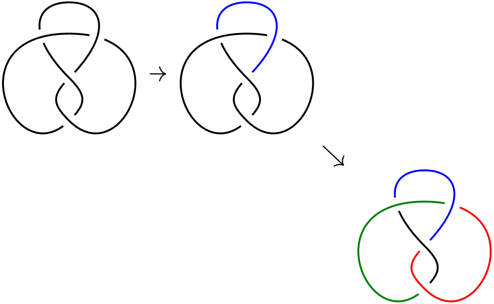
Não-exemplos:



Não-exemplos:







Teorema

A propriedade "ser tricolor" é preservada entre diagramas para um mesmo nó.

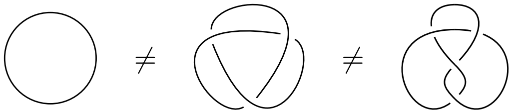
Teorema

A propriedade "ser tricolor" é preservada entre diagramas para um mesmo nó. Ou seja, é um **invariante de nós**.

Teorema

A propriedade "ser tricolor" é preservada entre diagramas para um mesmo nó. Ou seja, é um ***invariante de nós****.*

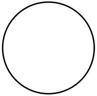
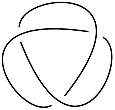
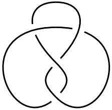
Corolário: O nó de trevo não é trivial, e é também diferente do nó em oito.



Teorema

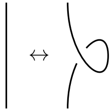
A propriedade "ser tricolor" é preservada entre diagramas para um mesmo nó. Ou seja, é um ***invariante de nós****.*

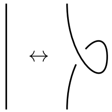
Corolário: O nó de trevo não é trivial, e é também diferente do nó em oito.

 $\neq$  $\neq$ 

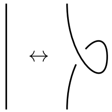
Demonstração: Basta verificar que a propriedade "ser tricolor" é preservada por movimentos de Reidemeister.

Tipo I:

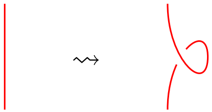


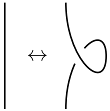
Tipo I: 

$(\rightarrow)$ Supor que o lado esquerdo é tricolor.

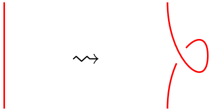
Tipo I: 

($\rightarrow$) Supor que o lado esquerdo é tricolor. Usar a mesma cor nos novos arcos.

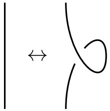


Tipo I: 

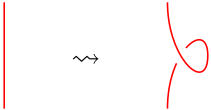
($\rightarrow$) Supor que o lado esquerdo é tricolor. Usar a mesma cor nos novos arcos.



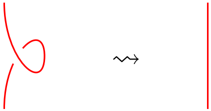
($\leftarrow$) Se o lado direito for tricolor, o cruzamento obriga a que sejam ambos os arcos da mesma cor.

Tipo I: 

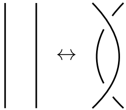
(→) Supor que o lado esquerdo é tricolor. Usar a mesma cor nos novos arcos.

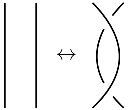


(←) Se o lado direito for tricolor, o cruzamento obriga a que sejam ambos os arcos da mesma cor. Usar essa cor no novo arco.

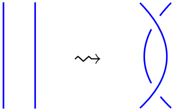


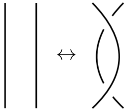
Tipo II:



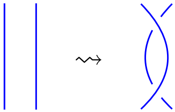
Tipo II: 

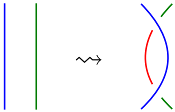
(→) Se os dois arcos à esquerda forem da mesma cor, usá-la nos quatro novos arcos.

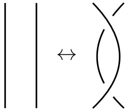


Tipo II: 

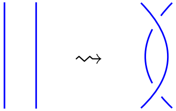
($\rightarrow$) Se os dois arcos à esquerda forem da mesma cor, usá-la nos quatro novos arcos. Caso contrário, usar a terceira cor:

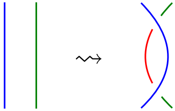




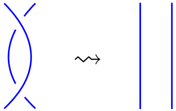
Tipo II: 

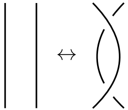
(→) Se os dois arcos à esquerda forem da mesma cor, usá-la nos quatro novos arcos. Caso contrário, usar a terceira cor:





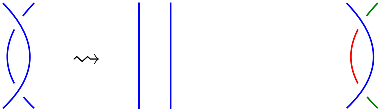
(←) Se os quatro arcos forem da mesma cor, usá-la nos dois novos arcos.

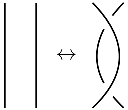


Tipo II: 

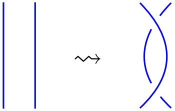
($\rightarrow$) Se os dois arcos à esquerda forem da mesma cor, usá-la nos quatro novos arcos. Caso contrário, usar a terceira cor:

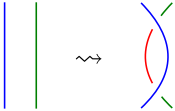
($\leftarrow$) Se os quatro arcos forem da mesma cor, usá-la nos dois novos arcos. Caso contráro, os cruzamentos obrigam a que o padrão de cores seja como ilustrado.



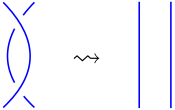
Tipo II: 

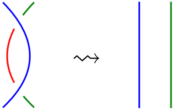
($\rightarrow$) Se os dois arcos à esquerda forem da mesma cor, usá-la nos quatro novos arcos. Caso contrário, usar a terceira cor:

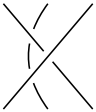
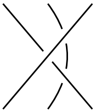


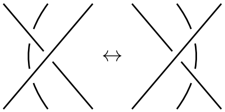


($\leftarrow$) Se os quatro arcos forem da mesma cor, usá-la nos dois novos arcos. Caso contráro, os cruzamentos obrigam a que o padrão de cores seja como ilustrado. Descartamos a cor vermelha:

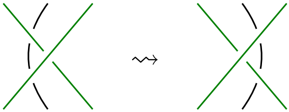


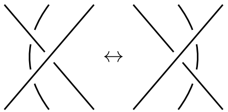


Tipo III:  $\leftrightarrow$ 

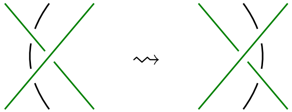
Tipo III: 

(→) Se os arcos envolvidos no cruzamento central forem da mesma cor, repetir no novo diagrama a coloração dos restantes arcos.

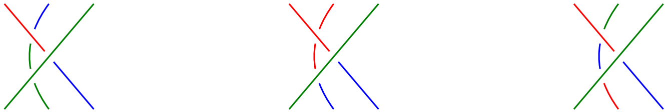


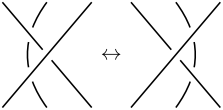
Tipo III: 

($\to$) Se os arcos envolvidos no cruzamento central forem da mesma cor, repetir no novo diagrama a coloração dos restantes arcos.

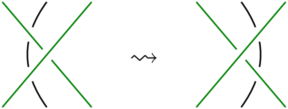


Se os arcos no cruzamento central tiverem cores diferentes, existem três configurações a considerar:

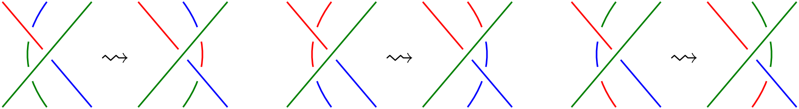


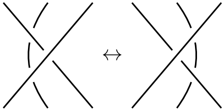
Tipo III: 

$(\rightarrow)$ Se os arcos envolvidos no cruzamento central forem da mesma cor, repetir no novo diagrama a coloração dos restantes arcos.

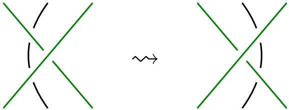


Se os arcos no cruzamento central tiverem cores diferentes, existem três configurações a considerar:

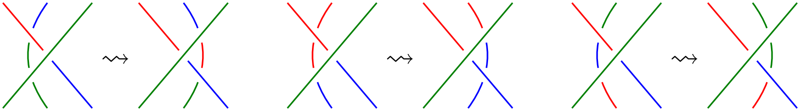


Tipo III: 

($\rightarrow$) Se os arcos envolvidos no cruzamento central forem da mesma cor, repetir no novo diagrama a coloração dos restantes arcos.



Se os arcos no cruzamento central tiverem cores diferentes, existem três configurações a considerar:

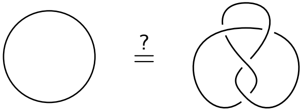


($\leftarrow$) Análogo. $\square$

Não é possível testar diretamente se dois diagramas estão relacionados por alguma sequência de movimentos de Reidemeister, mas a propriedade “ser tricolor” pode ser computada em tempo finito.

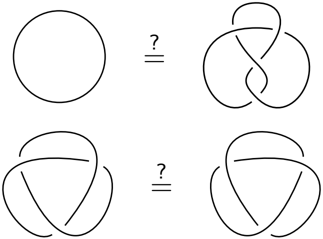
Não é possível testar diretamente se dois diagramas estão relacionados por alguma sequência de movimentos de Reidemeister, mas a propriedade “ser tricolor” pode ser computada em tempo finito.

Este não é um invariante muito forte:



Não é possível testar diretamente se dois diagramas estão relacionados por alguma sequência de movimentos de Reidemeister, mas a propriedade "ser tricolor" pode ser computada em tempo finito.

Este não é um invariante muito forte:



Não é possível testar diretamente se dois diagramas estão relacionados por alguma sequência de movimentos de Reidemeister, mas a propriedade "ser tricolor" pode ser computada em tempo finito.

Este não é um invariante muito forte: