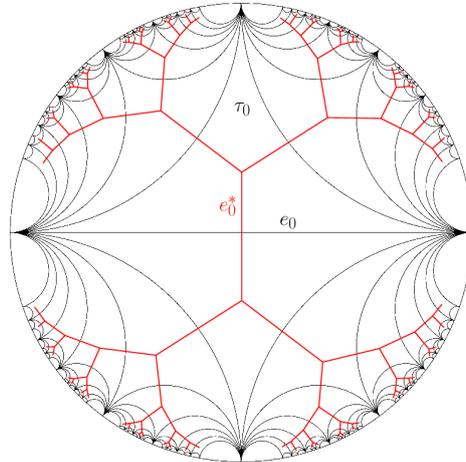


# Seminar: Gruppenwirkungen auf Bäumen

Prof. Dr. Petra Schwer\*

Dr. Raphael Appenzeller†

Dr. José Pedro Quintanilha‡



Zwischen der Geometrie eines Raumes und der Menge seiner Symmetrien besteht ein enger Zusammenhang. In diesem Seminar beschäftigen wir uns mit Gruppen, die auf Bäumen wirken und lernen Eigenschaften und Konstruktionen solcher Gruppen kennen. Wir werden uns unter anderem mit Bass–Serre Theorie und ihren Anwendungen beschäftigen und folgenden Fragen nachgehen:

- Was lernen wir aus den Eigenschaften einer Gruppenwirkung auf einem Baum über die Gruppe?
- Welche Gruppen wirken überhaupt auf (schönen, unendlich großen) Bäumen?

Als wesentliche Quelle für das Seminars wird uns das Buch *Trees* von Jean-Pierre Serre dienen. Über die genauen Quellen und Vortragsthemen informieren wir Sie bei der Vorbesprechung und auf der Webseite des Seminars.



<https://web.mathi.uni-heidelberg.de/ggt/treesws25>

**Vorbesprechung:** 23 Juli 2025, 13:00 Uhr, SR 4

---

\*schwer@uni-heidelberg.de

†rappenzeller@mathi.uni-heidelberg.de

‡jquintanilha@mathi.uni-heidelberg.de

## Vortragsthemen

Für Masterstudierende empfohlene Seminarthemen sind mit (★) bezeichnet.

1. **Graphen.** Einführung in Graphen (insbesondere Bäume) und ihre Eigenschaften; inverse Systeme und Unterbäume. [S] I.2.
2. **Fundamentaltbereiche und Erzeugendensysteme.** Definition von Fundamentaltbereichen von Gruppenwirkungen auf Graphen und Bestimmung von Erzeugendensystemen. [M] 1.8.
3. **Bäume und freie Gruppen.** (★) Untersuchung freier Gruppen und zugehöriger Bäume; Schreierscher Satz. Eindeutige Charakterisierung freier Gruppen durch ihre Wirkung auf Bäumen (das sollte eher eine Übersicht sein, komplementierend zur Vorlesung Geometrische Gruppentheorie). [S] I.3.
4. **Amalgame.** Einführung in Amalgame; Direkte Limiten von Gruppen; Beispiele und Präsentationen; HNN-Erweiterungen. [S] I.1.
5. **Amalgame und Bäume.** Charakterisierung von Amalgamen durch Gruppenwirkung auf Bäumen und umgekehrt. [S] I.4.1, I.4.2.
6. **Gruppenbäume.** (★) Einführung von Gruppenbäumen  $T$  und zugehörigen Gruppen  $G_T$ ; Charakterisierung mit Fundamentaltbereichen. [S] I.4.4, I.4.5.
7. **Bass-Serre Theory 1.** (★) Fundamentalgruppe von Graphen von Gruppen; Reduzierte Wörter (Theorem 11); Beispiele. [S] I.5.1, I.5.2.
8. **Bass-Serre Theory 2.** (★) Universelle Überlagerung (Theorem 12); Strukturtheorem (Theorem 13); Beispiele. [S] I.5.3, I.5.4.
9. **Bäume und Fixpunkte.** (★) Eigenschaft (FA) von Gruppen; Charakterisierung und Zusammenhang zu Amalgamen. [S] I.6.1–I.6.3.
10. **Automorphismen und Fixpunkte.** (★) Nachweis der Eigenschaft (FA) für  $SL_3(\mathbb{Z})$ . [S] I.6.4, I.6.6.
11. **Baum zu  $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ .** (★) Es wird der Baum zu  $SL_2(\mathbb{Q}_p)$  mit Hilfe von Gittern definiert und Stabilisatoren der Gruppenwirkung von  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$  werden beschrieben. [S] II.1.1–II.1.3.

Weitere mögliche Themen, je nach Nachfrage (★):

- Gruppenwirkungen auf Bäume mit Wurzeln,
- Thompson's group,
- Burger-Mozes groups,

## Organisation und Hinweise

- Die Vorlesung *Geometrische Gruppentheorie* sollte parallel besucht werden (oder im Wintersemester 2024).
- Das Seminar eignet sich sowohl für Bachelor-, Master- als auch Lehramt-Studierende. Bei erfolgreicher Teilnahme können Abschlussarbeitsthemen vergeben werden.
- Mindestens eine Woche vor den Vorträgen werden Besprechungen durchgeführt.
- Bitte auf MÜSli registrieren.
- Genaue Termine werden später vereinbart.

## Literatur

[S] J.-P. Serre, *Trees*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[M] J. Meier, *Groups, Graphs and Trees*, Cambridge University Press, 2008.

[RS] A. Raghuram, B. Sury, *Groups acting on trees*, Notes available at <https://www.isibang.ac.in/~sury/tree.pdf>.

[C] Ng Chung Lok Andrew *Groups acting on trees*, Notes available at <https://clandreigh.github.io/bass-serre.pdf>