Escola de Verão de Matemática 2015: Jogos Binários

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Monitor: José Pedro Quintanilha

Conteúdo

1 O sistema binário

1.1 Como escrevemos os números?

Pensemos no que queremos dizer quando representamos uma quantidade por uma sequência de algarismos no sistema **decimal**:

$$\begin{aligned} 2015 &= 2000 + 10 + 5 \\ &= \mathbf{2} \times 10^3 + \mathbf{0} \times 10^2 + \mathbf{1} \times 10^1 + \mathbf{5} \times 10^0 \end{aligned}$$

Para escrever um número, decompomo-lo como soma de potências de 10, multiplicadas por números inteiros entre 0 e 9 (os **algarismos**, ou **dígitos**). A posição de cada algarismo diz-nos qual é a potência de 10 que lhe corresponde.

É também isto que fazemos quando escrevemos números não-inteiros:

$$6.28 = \mathbf{6} \times 10^0 + \mathbf{2} \times 10^{-1} + \mathbf{8} \times 10^{-2}$$

Os algarismos à direita do ponto decimal são os que correspondem às potências de 10 com expoente negativo.

E as dízimas infinitas?

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= 0.333\ldots \\ &= \mathbf{0} \times 10^0 + \mathbf{3} \times 10^{-1} + \mathbf{3} \times 10^{-2} + \mathbf{3} \times 10^{-3} + \ldots \end{aligned}$$

Em geral, não podemos somar infinitas parcelas, mas na disciplina de Análise aprendemos a dar significado a algumas somas infinitas, entre elas as que correspondem às dízimas infinitas.

Este método para representar números é uma das invenções mais brilhantes da humanidade, porque:

1. Permite representar qualquer número inteiro, e aproximações tão boas quanto desejarmos de qualquer número não-inteiro.

2. Essa representação é única, quer dizer, só há uma maneira de escrever cada número.

3. Se admitirmos dízimas infinitas, podemos de facto representar qualquer número real (mas aí os números que correspondem a dízimas finitas passam a ter duas representações. Por exemplo, $1 = 0.999\ldots$).

4. Permite comparar números com muita facilidade. Para saber qual de dois números é maior, comparamos os algarismos correspondentes a cada potência de 10, começando na maior. Como na ordem alfabética!

5. À medida que os números crescem, os comprimentos das suas representações crescem cada vez mais lentamente. Um número 10 vezes maior que outro não tem uma representação 10 vezes mais longa.[1]

Mas por que razão usamos potências de 10 e não qualquer outro inteiro positivo? Que propriedade do número 10 justifica o seu papel tão central? A resposta a esta pergunta é "Nenhuma"! A razão para usarmos o número 10 é meramente histórica e está relacionada simplesmente com o facto de possuirmos 10 dedos!

[1] Mais precisamente, o comprimento das representações cresce de modo *logarítmico*.

1.2 E se só tivéssemos 8 dedos?

Dizemos que 10 é a **base** do nosso sistema de representação. Mas se os seres humanos tivessem apenas quatro dedos em cada mão, provavelmente usaríamos o sistema **octal**, isto é, representação em base 8, que usa apenas os algarismos de 0 até 7, e as potências de 8.

Por exemplo, pensemos em que número é representado pela sequência de algarismos "2015" em base 8:

$$\begin{aligned} 2015_8 &= \mathbf{2} \times 8^3 + \mathbf{0} \times 8^2 + \mathbf{1} \times 8^1 + \mathbf{5} \times 8^0 \\ &= 2 \times 512 + 0 \times 64 + 1 \times 8 + 5 \times 1 \\ &= 1037 \end{aligned}$$

Exercício 1. *Escrever em decimal o número* 1234_8. *É útil conhecer as primeiras potências de 8:*

$$8^0 = 1 \qquad 8^1 = 8 \qquad 8^2 = 64 \qquad 8^3 = 512 \qquad 8^4 = 4096$$

Vimos o que fazer para descodificar um número de base 8 para base 10. E se quisermos efetuar o processo inverso, isto é, escrever um número natural n (dado em base 10) em base 8?

1. Determinamos a maior potência de 8 que não excede n, digamos, 8^k. Esse k vai ser a posição do primeiro algarismo.

2. Perguntamos "Quantas vezes é que 8^k cabe em n?". Isto corresponde a efetuar a divisão inteira de n por 8^k. O resultado deverá ser um número inteiro a entre 0 e 7, que é o algarismo que devemos pôr na posição k.

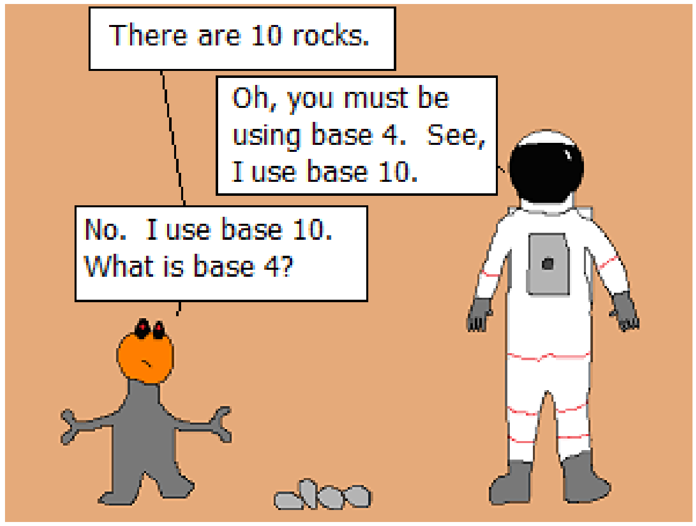
3. Agora basta substituir n por $n - a \times 8^k$, k por $k - 1$ e, se n ainda for maior do que 0, voltar ao passo 2. Caso contrário, terminámos!

Exercício 2. *Escrever o número 1159 em octal.*

Estamos agora em posição de compreender as seguintes piadas:

Piada 1. *Porque é que os matemáticos costumam confundir o Natal com o Halloween?*
Porque $\mathrm{Oct}(31) = \mathrm{Dec}(25)$.

Piada 2.



Every base is base 10.

1.3 O sistema binário

A menor base que podemos usar para um sistema de representação numérica é 2. Em base 2 (ou **binário**), os números são escritos usando apenas os algarismos 0 e 1, e isso permite representá-los usando sequências de estados ligado/desligado, aberto/fechado, etc.. Por esse motivo, o sistema binário é muito relevante na área da computação. Os algarismos de uma representação binária são muitas vezes designados por **bits**.

Exercício 3. *Escrever em decimal o número* 1101011_2. *As primeiras potências de 2 são:*

$$\begin{array}{llll} 2^0 = 1 & 2^1 = 2 & 2^2 = 4 & 2^3 = 8 \\ 2^4 = 16 & 2^5 = 32 & 2^6 = 64 & 2^7 = 128 \\ 2^8 = 256 & 2^9 = 512 & 2^{10} = 1024 & 2^{11} = 2048 \end{array}$$

Este exercício mostra o quão fácil é descodificar um número de binário para decimal. Como uma escrita em binário usa apenas 0's e 1's, a representação binária de um número dá-nos uma sua decomposição como uma soma de potências de 2 todas distintas.

Piada 3. *Há 10 tipos de pessoas no mundo: as que percebem binário, e as que não.*

Também é especialmente simples converter um número para binário. Adaptando o algoritmo de conversão para octal visto atrás, obtemos no ponto 2 a pergunta "Quantas vezes é que 2^k cabe em n?". Mas aqui a resposta só pode ser 1 (cabe) ou 0 (não cabe). Assim, o passo de divisão inteira reduz-se a uma mera comparação!

Exercício 4. *Escrever o número 1159 em binário.*

Ao resolver este exercício, deparamo-nos com uma das desvantagens da escrita em binário: as representações são mais compridas do que nas outras bases. De facto, a representação de um número em binário é, em geral, cerca de 3 vezes mais longa do que em octal. (Porquê?)

1.4 Operações em base 2

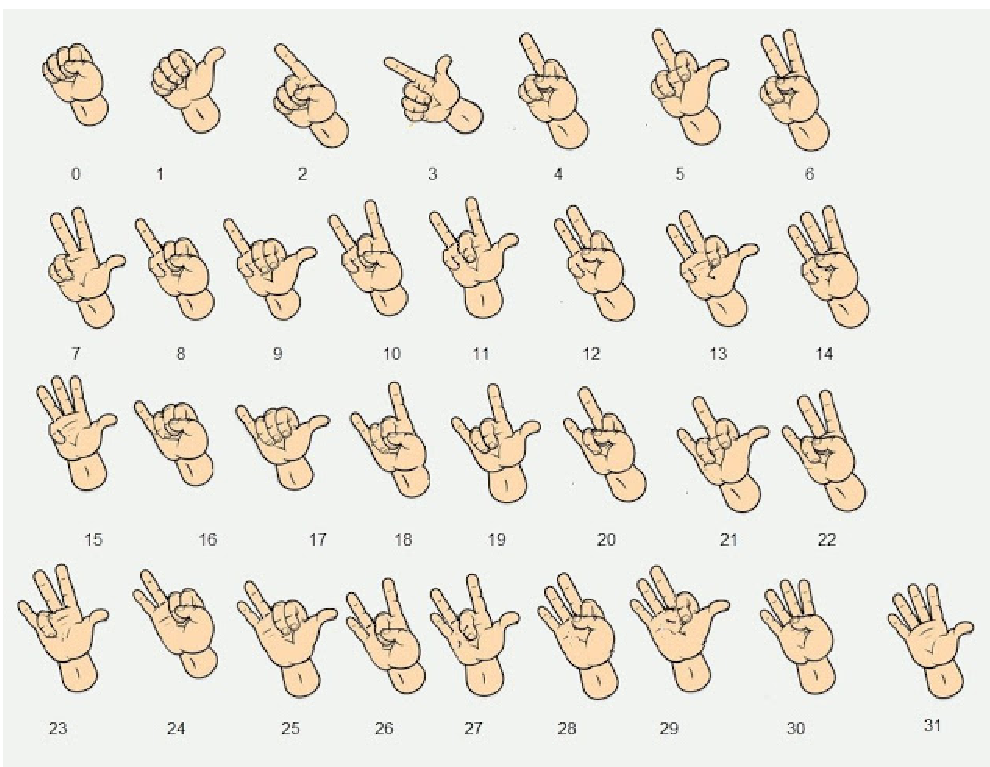
Quando temos um número natural escrito em base 10, é muito fácil representar o seu sucessor. Basta encontrar o primeiro algarismo (contando da direita) que é diferente de 9, somar 1 a esse algarismo e substituir os 9's que vinham antes por 0's.

Em binário, a ideia é a mesma, só que o 1 desempenha o papel do 9: Para encontrar o sucessor de um número natural escrito em binário, substituímos o primeiro 0 por 1 (contando da direita) e todos os 1's à sua direita por 0's. Por exemplo, o sucessor de 1101011_2 é 1101100_2, e o sucessor deste é 1101101_2.

Na página seguinte é apresentada uma tabela com a escrita dos números naturais de 0 até 127. Antes de a espreitar, resolvamos o

Exercício 5. *Escrever em binário os números inteiros de 0 até 32.*

Habituámo-nos a pensar que com os dedos de uma mão conseguimos contar (só) de 0 até 5. Mas se temos 5 dedos e cada dedo pode estar baixado ou levantado, há de facto $2^5 = 32$ configurações possíveis para os dedos de uma mão. Uma forma de as usar para contar desde 0 até 31 é codificar cada um desses números em binário, sendo que cada dedo representa um bit, como ilustrado na figura seguinte[2]:



O jogo no seguinte endereço permite praticar a escrita em base 2: `http://forums.cisco.com/CertCom/game/binary_game_page.htm`

Também os algoritmos que aprendemos na escola primária para somar, subtrair, multiplicar e dividir números escritos em base 10 são perfeitamente adaptáveis para números escritos em base 2.

[2] Retirada de `http://apetrilla.blogspot.pt/2012/08/binary-counting-on-fingers.html`

Representação em binário dos inteiros entre 0 e 127.
(Adaptado de `http://docstore.mik.ua/univercd/cc/td/doc/product/tel_pswt/vco_prod/std_prg/stprb.htm`)

DEC	BIN	DEC	BIN	DEC	BIN
0	00000000	43	00101011	86	01010110
1	00000001	44	00101100	87	01010111
2	00000010	45	00101101	88	01011000
3	00000011	46	00101110	89	01011001
4	00000100	47	00101111	90	01011010
5	00000101	48	00110000	91	01011011
6	00000110	49	00110001	92	01011100
7	00000111	50	00110010	93	01011101
8	00001000	51	00110011	94	01011110
9	00001001	52	00110100	95	01011111
10	00001010	53	00110101	96	01100000
11	00001011	54	00110110	97	01100001
12	00001100	55	00110111	98	01100010
13	00001101	56	00111000	99	01100011
14	00001110	57	00111001	100	01100100
15	00001111	58	00111010	101	01100101
16	00010000	59	00111011	102	01100110
17	00010001	60	00111100	103	01100111
18	00010010	61	00111101	104	01101000
19	00010011	62	00111110	105	01101001
20	00010100	63	00111111	106	01101010
21	00010101	64	01000000	107	01101011
22	00010110	65	01000001	108	01101100
23	00010111	66	01000010	109	01101101
24	00011000	67	01000011	110	01101110
25	00011001	68	01000100	111	01101111
26	00011010	69	01000101	112	01110000
27	00011011	70	01000110	113	01110001
28	00011100	71	01000111	114	01110010
29	00011101	72	01001000	115	01110011
30	00011110	73	01001001	116	01110100
31	00011111	74	01001010	117	01110101
32	00100000	75	01001011	118	01110110
33	00100001	76	01001100	119	01110111
34	00100010	77	01001101	120	01111000
35	00100011	78	01001110	121	01111001
36	00100100	79	01001111	122	01111010
37	00100101	80	01010000	123	01111011
38	00100110	81	01010001	124	01111100
39	00100111	82	01010010	125	01111101
40	00101000	83	01010011	126	01111110
41	00101001	84	01010100	127	01111111
42	00101010	85	01010101		

Exercício 6. *Sabemos que no sistema decimal, para multiplicar um número inteiro por 10 basta acrescentar-lhe um 0 à direita. Qual é a regra correspondente no sistema binário?*

Desafio 1. [3] *Foi efetuada uma multiplicação em sistema binário, sendo que cada estrela em baixo representa um 1 ou um 0:*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & * & * & * & * \\
 & & & \times & * & * & * \\
\hline
 & & & * & * & * & * \\
 & * & * & * & * & & \\
\hline
* & * & * & 1 & * & * & *
\end{array}$$

Que números estariam no lugar das estrelas?

Dica: *Não escrevemos números inteiros positivos com 0's à esquerda...*

Desafio 2. *Análogo ao desafio anterior, mas desta vez com uma divisão:*

$$\begin{array}{ccccccc|cccc}
* & * & * & * & * & * & 1 & * & * & * & * \\
\cline{8-11}
* & * & * & * & & & & * & * & * & * \\
 & & * & * & * & * & & & & & \\
 & & * & * & * & * & & & & & \\
 & & & * & * & * & * & & & & \\
 & & & * & * & * & * & & & &
\end{array}$$

1.5 Um truque com potências de 2

Há vários truques e jogos que se baseiam no facto de qualquer número natural poder ser escrito de forma única como soma de potências de 2 distintas. Um deles usa os seguintes cartões[4]:

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

[3]Este desafio e o seguinte retirados de Pierre Berloquin, *100 Jogos Numéricos*

[4]Imagens de `http://diaryofagrumpyteacher.blogspot.pt/2014/04/freebie-friday-magic-number-cards.html`

O executante do truque começa por pedir a alguém da audiência que pense num número inteiro entre 0 e 63, sem o revelar. Pergunta-lhe apenas em quais de entre os 6 cartões esse número está presente. Com essa informação, o executante consegue em poucos segundos revelar o número secreto!

Para efetuar o truque, basta adicionar os números no canto superior esquerdo de cada cartão onde o número está presente. Por exemplo, suponhamos que tinha sido escolhido o número 22, que está presente exatamente nos seguintes cartões:

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Somando $2 + 4 + 16$, o executante tem a resposta!

Apesar da simplicidade da execução deste truque, devemos refletir sobre o porquê de ele funcionar. Como terão sido construídos estes cartões?

A primeira observação a fazer é que os números nos cantos superiores esquerdos dos cartões são precisamente as potências de 2 entre $1 = 2^0$ e $32 = 2^5$. Assim, quando o espectador aponta para os cartões que contêm o seu número, está na realidade a dizer como se pode obtê-lo como soma de potências de 2 distintas. Isso não é mais do que dar a sua escrita em binário! Os cartões onde o número está presente correspondem aos 1's, e os restantes aos 0's.

Como exemplo, imaginemos que desejamos construir estes cartões de raiz, e temos de decidir em quais colocar o número 25. Ora, $25 = 11001_2 = 16 + 8 + 1$, portanto o 25 deve figurar precisamente nos cartões correspondentes às potências 1, 8 e 16.

1.6 O jogo do Nim

Um outro divertimento matemático onde a representação em binário é utilizada é o jogo do Nim, que funciona do seguinte modo: São criadas 3 ou mais pilhas com tantas pedras quisermos (não tem de ser o mesmo número de pedras em todas as pilhas). O recomendado é entre 4 e 15 por pilha. Os dois participantes jogam à vez e, no seu turno, cada jogador

1. escolhe um dos montes que ainda tenham pedras, e

2. retira desse monte tantas pedras quantas desejar (pode até tirá-las todas, mas tem de tirar pelo menos uma!).

Quando não restarem mais pedras na mesa, o jogo termina e o vencedor é quem tiver retirado a última pedra.

Podemos experimentar o jogo em `http://www.gamedesign.jp/flash/nim/nim.html`.

Apesar de parecer muito complicado prever o desenrolar do jogo, existe uma estratégia que garante a vitória a um dos jogadores. Poderá ser ao primeiro ou ao segundo, dependendo da configuração inicial das pedras.

Para compreender essa estratégia, comecemos por um exemplo: Suponhamos que temos em jogo 3 pilhas, com 3, 6 e 7 pedras, e escrevamos estes números em binário, que é o mesmo que decompô-los como somas de potências de 2 distintas:

$$\begin{aligned} 3 &= 11_2 = 2 + 1 \\ 6 &= 101_2 = 4 + 2 \\ 7 &= 111_2 = 4 + 2 + 1 \end{aligned}$$

Vemos que as potências 1 e 4 aparecem ao todo duas vezes, o 2 aparece três vezes, e as restantes potências zero vezes. Como o 2 aparece um número ímpar de vezes, dizemos que está **desemparelhado**. Todas as outras potências de 2 estão **emparelhadas**, pois aparecem um número par de vezes.

A partir de agora, vamos dizer que o jogo está **equilibrado** se todas as potências de 2 estão emparelhadas; caso contrário, diremos que está **desequilibrado**. Assim, no exemplo anterior o jogo está desequilibrado. Se tivéssesmos, por exemplo, pilhas com 7, 8 e 15 pedras, ele estaria equilibrado:

$$\begin{aligned} 7 &= 111_2 = 4 + 2 + 1 \\ 8 &= 1000_2 = 8 \\ 15 &= 1111_2 = 8 + 4 + 2 + 1 \end{aligned}$$

Exercício 7. *Suponhamos que temos em jogo quatro pilhas, com 3, 6, 9 e 14 pedras. O jogo está equilibrado ou desequilibrado?*

Exercício 8. *Um jogo com pilhas de 2, 5 e 9 pedras está desequilibrado. Que jogada podemos fazer para o equilibrar?*

O segredo para vencer o jogo do Nim é conhecer os seguintes factos:

1. Sempre que o jogo está desequilibrado, é possível fazer uma jogada que o equilibre, removendo pedras de um dos montes que contenham a maior potência de 2 desemparelhada.

2. Sempre que o jogo está equilibrado, qualquer jogada vai desequilibrá-lo.

3. Quando não há mais pedras na mesa, o jogo está equilibrado.

Assim, se o primeiro jogador tiver o jogo desequilibrado, pode garantir a própria vitória. Para isso, basta-lhe jogar sempre de modo a equilibrar o jogo. O seu adversário, pelo contrário, será forçado a desequilibrá-lo em todas as jogadas, e esta alternância vai-se mantendo até ao fim. Como o jogo termina num estado equilibrado, terá sido o primeiro jogador a retirar a última pedra. Se, pelo contrário, a configuração inicial do jogo for uma de equilíbrio, a estratégia vencedora pode ser aplicada não pelo primeiro, mas pelo segundo jogador.

2 Par ou ímpar

Além da escrita em base 2, o jogo do Nim ilustra o poder de uma outra ferramenta matemática, que são os argumentos de paridade. Nesta secção veremos exemplos de problemas que se resolvem à luz da perspetiva da divisibilidade por 2.

Antes disso, e como epílogo para a secção anterior, pensemos no seguinte

Exercício 9. *Dada um representação em binário de um número inteiro, é muito fácil determinar se e ele é par ou ímpar sem converter para decimal nem efetuar a divisão. Qual é o critério?*

2.1 Extrações aleatórias (?)

Suponhamos que temos um saco que contendo 75 bolas brancas e 75 bolas pretas. Vamos extrair aleatoriamente duas bolas do saco, e:

1. Se as bolas forem da mesma cor, descartamo-las e introduzimos no saco uma bola branca.

2. Se as bolas forem de cor diferente, descartamo-las e introduzimos no saco uma bola preta.

Ao fazer isto, reduzimos em 1 o número total de bolas no saco. Vamos repetir o processo sucessivamente até restar apenas uma bola. A pergunta a que queremos responder é:

De que cor é a última bola que fica no saco?

Solução: À primeira vista, a questão parece estar mal colocada! Afinal, se as extrações são feitas de modo aleatório, como é possível saber com certeza a cor da última bola? Não deveríamos estar antes a calcular a *probabilidade* de a última bola ser preta ou branca?

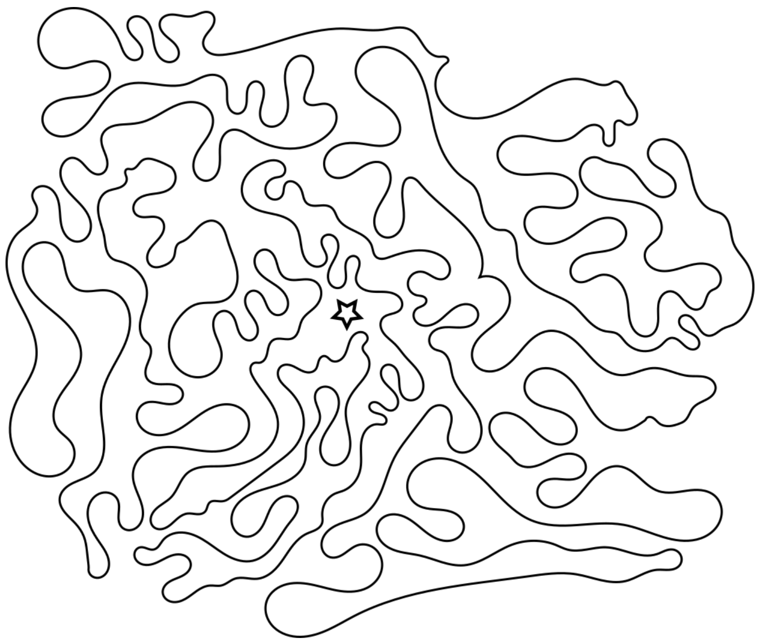
Na verdade, apesar da aleatoriedade do processo, a cor da última bola está completamente determinada desde o início! Assim que virmos porque é que isto é verdade, saberemos também de imediato qual é essa cor.

O problema resolve-se de imediato se notarmos que em cada extração a paridade do número de bolas pretas no saco fica inalterada, isto é, se havia um número par de bolas pretas, elas continuarão em número par, e análogo para um número ímpar. Ora, se no início tínhamos 75 bolas pretas (um número ímpar), então quando restar apenas uma bola, ela tem de ser preta, pois caso contrário haveria 0 bolas pretas (um número par).

2.2 Um truque com um cordel

Passemos a um problema de natureza geométrica. Suponhamos que temos um longo cordel ao qual atámos as pontas, e que o vamos dispor sobre uma superfície sem que nenhum segmento do cordel se sobreponha a outro. A ideia é formar um padrão intrincado, como ilustrado abaixo.

É claro que uma tal configuração divide a superfície em duas **regiões**: uma **interior** e outra **exterior** ao cordel[5]. Em particular, se colocarmos um prego em algum ponto da superfície (por exemplo, o ponto assinalado com uma estrela), e depois puxarmos o cordel, ele poderá ou não ter ficado preso ao prego. Como podemos (antes de puxar o cordel) saber se o ponto que escolhemos é interior ou exterior?

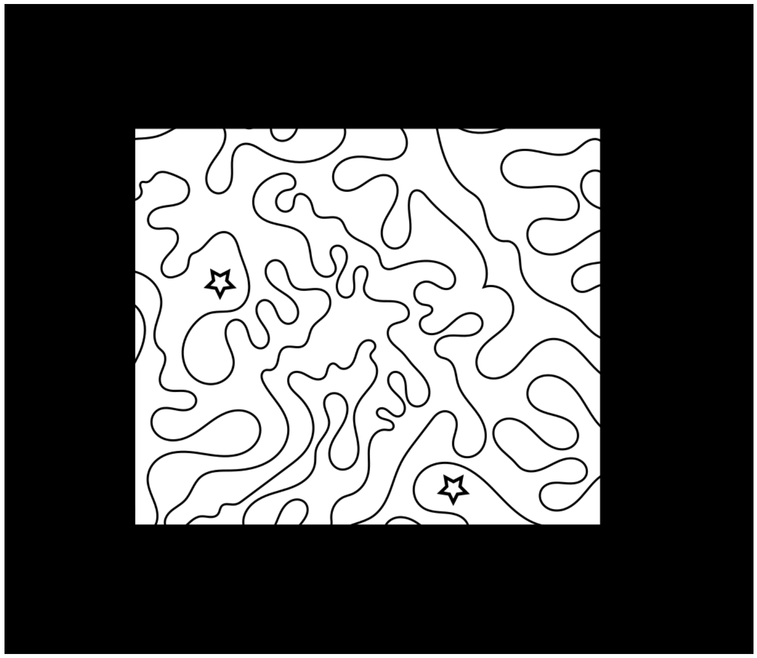


A abordagem natural, que em geral resulta mas em configurações intrincados pode ser demorada, é tentar encontrar um caminho desde o prego até algum ponto afastado do cordel, como num labirinto.

Existe contudo um método mais elegante: Escolhemos um ponto afastado do cordel (que saibamos de certeza ser exterior) e imaginamos uma linha a uni-lo ao prego. De seguida, contamos o número de vezes que essa linha atravessa o cordel: Se o resultado for ímpar, o prego está no interior da região delimitada pelo cordel; caso contrário está no exterior!

Talvez mais impressionante seja a seguinte variante: Mesmo tapando os bordos da figura, como em baixo, é possível saber se dois pontos estão na mesma região ou não!

[5] Na verdade, dizer que este facto "é claro" é abusivo. Apesar de parecer muito intuitivo, o facto de que uma curva fechada sem auto-interseções separa o plano em duas regiões é parte do importante Teorema da Curva de Jordan. A sua demonstração requer técnicas sofisticadas de uma área da Matemática chamada Topologia Algébrica.



Desta vez, a estratégia de procurar cegamente um caminho de um ponto ao outro é infrutífera. Contudo, o método que vimos pode ser adaptado. De novo, imaginamos uma linha a unir um ponto ao outro, e se essa linha atravessar o cordel um número par de vezes, os dois pontos estão na mesma região; caso contrário estão em regiões diferentes.

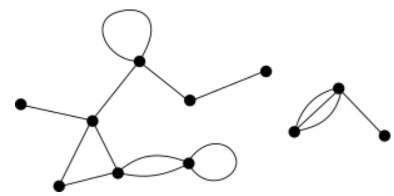
É útil reparar que o método visto na primeira variante do problema é um caso particular do da segunda. Mas porque é que funciona? Imaginemo-nos a percorrer a nossa linha imaginária de uma ponta à outra. De cada vez que ela atravessa o cordel, trocamos de região[6]. Evidentemente, se trocarmos de região um número par de vezes ficamos na mesma de onde partimos, e caso contrário passamos para a outra.

2.3 O Teorema dos Abraços

Se quisermos imaginar o conjunto de todos os utilizadores do Facebook e as ligações entre eles, provavelmente a imagem que nos ocorre é a de uma rede, onde as pessoas são os nós, e estão ligadas pelas relações de "amizade". Também não é difícil pensar em muitos outros contextos onde estas estruturas de rede são excelentes representações, por exemplo, redes de transportes, de distribuição de energia, redes neuronais, etc..

O conceito matemático que formaliza este tipo de estruturas é o de **grafo**. Um grafo é um objeto composto por um conjunto de **vértices** e um conjunto de **arestas**, sendo que cada aresta liga dois vértices. Ao contrário do que acontece no grafo do Facebook, podemos ter arestas a ligar um vértice a si mesmo, e também arestas diferentes a ligar o mesmo par de vértices, como no exemplo abaixo.

[6]Isto é mesmo verdade? Um leitor com especial espírito crítico aperceber-se-á de que se a linha imaginária for tangente ao cordel em algum ponto, então podemos não trocar de região nesse ponto de interseção! Por essa razão usámos no texto a palavra "atravessar" e não "intersetar". Em rigor, para a estratégia funcionar devemos exigir que a nossa linha imaginária intersete o cordel sempre de modo transversal.



Dizemos que o número de arestas que incidem num vértice é o seu **grau**, contando duas vezes arestas que liguem um vértice a si próprio. No grafo acima, há cinco vértices de grau 4.

Um dos primeiros teoremas que são estudados em Teoria de Grafos é um resultado sobre paridade:

Teorema 1 (Teorema dos Abraços)**.** *Se somarmos os graus de todos os vértices de um grafo, obtemos um número par.*

Demonstração. Podemos pensar em cada aresta do grafo como tendo duas extremidades, e o grau de cada vértice é justamente o número de extremidades de arestas que incidem nesse vértice. Se somarmos os graus de todos os vértices, estaremos a contabilizar todas as extremidades de todas as arestas do grafo. Esse número é o dobro do número de arestas, portanto é par. □

Apesar da simplicidade deste resultado, ele permite tirar conclusões que não são nada óbvias. De facto, é suficiente para resolver os desafios seguintes:

Desafio 3. *Um dia, cinco amigos encontraram-se, mas em vez de se cumprimentarem como habitualmente, decidiram que cada um deles cumprimentaria apenas alguns dos restantes, de tal maneira que no final cada um tivesse cumprimentado exatamente 3 pessoas. Conseguiram fazê-lo?*

Desafio 4. *Era uma casa muito engraçada. Cada divisão (incluindo os corredores) tinha um número ímpar de portas. Havia duas portas para o exterior da casa. O número de divisões era par ou ímpar?*

Desafio 5. *Se contarmos os utilizadores do Facebook que têm um número ímpar de "amigos", obtemos um número par. Porquê?*

2.4 100 chapéus

Certo dia, um diabólico tirano dirigiu-se a 100 dos seus prisioneiros anunciando:

"Amanhã vou fazer-vos um teste. Sereis colocados em fila indiana, e a cada um de vós será posto um chapéu, que poderá ser branco ou preto. Cada prisioneiro conseguirá apenas ver os chapéus de quem está à sua frente, mas não o seu próprio chapéu. Começando pelo prisioneiro no fim da fila, que consegue ver todos os chapéus restantes, gritareis em sequência ≪BRANCO≫ ou ≪PRETO≫, e nada mais! No final, aqueles que tiverem dito a cor do próprio chapéu serão libertados; os restantes serão executados. Se algum de vós tentar violar as regras e transmitir mais alguma informação, sereis todos executados."

Os prisioneiros (assaz versados em Matemática) foram levados para as masmorras, onde puderam pensar numa estratégia para tentar salvar-se. Conseguiram conceber num plano que garantidamente salvaria pelo menos 99 dos 100 prisioneiros. Qual foi a ideia deles?

Solução: O prisioneiro no fim da fila não tem como obter informação sobre a cor do chapéu que lhe calhou, portanto é impossível garantir que ele será salvo. A sua aposta servirá no entanto para transmitir informação aos restantes prisioneiros. O que ele vai fazer é contar os chapéus pretos que vê. Se esse número for par, gritará "BRANCO", caso contrário, "PRETO". Todos os prisioneiros ficarão então a conhecer a paridade do número de chapéus pretos entre os 99 restantes.

Agora, na sua vez de falar, cada prisioneiro saberá, de entre esses 99, quantos chapéus pretos estão à sua frente (pois consegue vê-los) e atrás de si (pois terá ouvido as apostas dos prisioneiros anteriores). Se a paridade do número total de chapéus pretos contados for igual à anunciada no início, deduz que o seu próprio chapéu é branco; caso contrário é preto.

2.5 O jogo do MIU

Terminamos a secção sobre divisibilidade por dois com um problema que ilustra uma extensão natural destas ideias. O desafio é apresentado no maravilhoso livro *Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid*, de Douglas Hofstadter. Vamos escrever sequências com as letras M, I e U, começando com a sequência MI. Construímos novas sequências aplicando as seguintes quatro regras a sequências que já tenhamos escrito.

1. Se uma sequência termina em I, podemos acrescentar-lhe um U no final. ($xI \to xIU$)
2. Se uma sequência começa com M, podemos acrescentar-lhe no final uma cópia da porção que sucede esse M. ($Mx \to Mxx$)
3. Três I's consecutivos podem ser substituídos por um U. ($xIIIy \to xUy$)
4. Dois U's consecutivos podem ser eliminados. ($xUUy \to xy$)

Podemos aplicar cada regra tantas vezes quantas desejarmos. O objetivo é construir a sequência MU. Será isso possível? Se sim, como? Se não, porquê?

Solução: Desta vez, a chave para resolver o problema não reside em argumentos de paridade, mas sim de divisibilidade por 3. Em particular, vemos que o número de I's na sequência de partida não é múltiplo de 3, e que nenhuma das quatro regras permite alterar esta propridade:

- As regras 1 e 4 não alteram o número de I's na sequência.
- Quando duplicamos um número que não é múltiplo de 3, ele não passa a ser múltiplo de 3 (porquê?). Assim, a regra 2 não permite obter uma sequência com número de I's múltiplo de 3 a partir de uma onde eles não estejam em número múltiplo de 3.
- Subtrair 3 a um número preserva a divisibilidade por 3, portanto o mesmo pode ser dito da regra 3.

Como na sequência MU o número de I's é múltiplo de 3, concluímos que é impossível chegar a essa sequência.

Em geral, quando reduzimos um problema nos números inteiros ao estudo da divisibilidade por um número fixo, dizemos que estamos a trabalhar em **Aritmética Modular**. É uma ferramenta poderosa que permite, por exemplo, resolver a seguinte generalização do problema dos 100 chapéus:

Suponhamos que em vez de duas cores, os chapéus podiam ter uma de n cores. Quando tivessem de falar, os prisioneiros poderiam, naturalmente, proferir uma dessas n cores. Como fazer para salvar 99 dos 100 prisioneiros?

A solução do problema não será dada aqui. Apenas será dito que a estratégia é uma total generalização daquela que vimos com duas cores.

3 O mundo bivalente

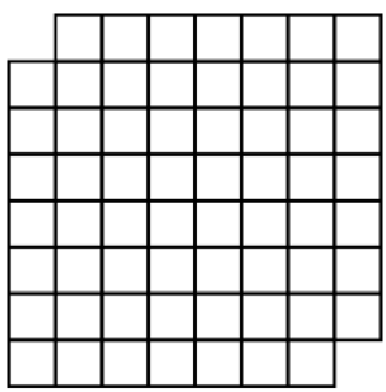
Nesta secção veremos outras aplicações de princípios de bivalência, com problemas sobre colorações, e faremos uma pequena digressão pelo mundo da lógica proposicional.

3.1 Pavimentação com dominós

Começamos com uma grelha 8×8, que queremos cobrir com pedras de dominó. Cada pedra cobre exatamente dois quadrados adjacentes da grelha, e desejamos que todos os quadrados fiquem cobertos sem que haja sobreposição das pedras de dominó nem partes dos dominós fora da grelha. Na grelha 8×8, rapidamente se consegue encontrar uma configuração.

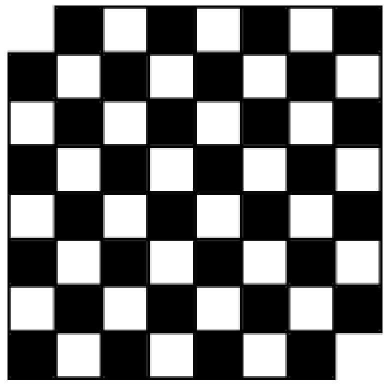
Se em vez disso tivermos uma grelha 7×7, a tarefa é impossível e facilmente vemos porquê: É que nesse caso, o número de quadrados a cobrir é 49, que é ímpar, e se cada dominó cobre dois quadrados, o número total de quadrados a cobrir tem de ser par.

O problema fica mais interessante quando consideramos uma grelha 8×8 à qual foram removidos dois cantos opostos, como ilustrado.



Desta vez o argumento de paridade que usámos para mostrar que é impossível cobrir a grelha 7×7 não é aplicável, uma vez que o número de quadrados a cobrir, 62, é par. Todavia, se tentarmos cobrir o tabuleiro mais ou menos "às cegas", as tentativas parecem ir saindo sempre frustradas. Mas será impossível?

Existe uma forma muito elegante de ver que sim, é impossível. O truque é pintar a grelha! Debrucemo-nos novamente na grelha 8×8 completa, mas imaginemo-la colorida como um tabuleiro de xadrez. Sempre que colocamos uma pedra de dominó, ela cobre forçosamente uma casa branca e uma casa preta. O que acontece quando retiramos os dois cantos?



As duas casas que retiramos são ambas brancas, portanto a figura que queremos cobrir tem mais casas pretas do que brancas. Mas se cada dominó cobre uma casa preta e uma branca, não podemos cobrir uma figura que as tenha em número diferente.

3.2 Um jogo com moedas

Consideremos 100 moedas (não necessariamente com o mesmo valor) dispostas em fila. Por turnos, dois jogadores vão tirando uma moeda de cada vez, podendo apenas tirá-la de uma das pontas da fila, até não restarem mais. É claro que no final ambos os jogadores terão retirado o mesmo número de moedas. Que estratégia pode o primeiro jogador utilizar para garantir que fica com tanto ou mais dinheiro do que o segundo jogador?

Solução: Podemos novamente usar um argumento de coloração. O que o primeiro jogador deve fazer é imaginar as moedas coloridas alternadamente em branco e preto e decidir se é maior o montante das moedas brancas ou o das pretas. Imaginemos, por exemplo, que as moedas pretas no total valem mais. Se ele começar por pegar na única moeda preta que disponível, força o seu opositor a tirar uma moeda das brancas e a libertar novamente uma moeda preta. Procedendo sempre deste modo, no final o primeiro jogador terá tirado para si todas as moedas pretas, e portanto terá ficado com um montante maior.

3.3 Verdadeiro ou Falso?

Um ramo da Matemática onde a ideia da bivalência assume um papel central é o da Lógica, em particular ao nível do Cálculo Proposicional. Aqui, usamos variáveis para representar **proposições**, ou seja, afirmações que podem ser ou verdadeiras, ou falsas (por exemplo, "O céu é verde." ou "$1 + 1 = 2$").

Exercício 10. *Consideremos a afirmação p:*

A afirmação p é falsa.

Esta afirmação não é uma proposição. Porquê?

É comum representar o **valor lógico** "verdadeiro" com 1, e "falso" com 0. Utilizamos ainda um conjunto de **conetivos** para formar novas proposições à custa de outras. Os mais usados são a negação ($\sim$), a conjunção ($\wedge$), a disjunção ($\vee$) e a implicação ($\rightarrow$). O efeito destes conetivos no valor lógico das proposições a que são aplicados vem sintetizado na seguinte **tabela de verdade**:

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1

Por exemplo, se p representa a proposição "O quadro é preto." e q representa a proposição "A mesa é de madeira.", então $p \vee \sim q$ representa "O quadro é preto ou a mesa não é de madeira.".

A Matemática recreativa está repleta de jogos e desafios relacionados com lógica. Eis alguns exemplos:

Desafio 6. *Estás numa ilha onde todos os habitantes pertencem a uma de duas famílias: a família M ou a família V. Sabe-se que os elementos da família V falam sempre verdade e os da família M mentem sempre, mas não há forma de distinguir só com o olhar os elementos de uma família dos da outra.*

1. *Um dia, cruzas-te com dois habitantes e um deles diz: "Somos ambos da família M.". A que família pertence cada um deles?*

2. *Se ele tivesse dito "Exatamente um de nós é da família M.", o que se poderia concluir?*

3. *Mais à frente, encontras uma bifurcação na estrada, e apenas um dos caminhos conduz à cidade mais próxima, aonde queres chegar. Dois habitantes encontram-se lá, e desconheces a família a que cada um pertence, mas sabes que são de famílias diferentes, e que ambos conhecem o caminho correto e a família a que o outro pertence. Que pergunta de "sim"/"não" podes fazer a um deles para determinar o caminho a seguir?*

Desafio 7. *O Tó foi ao concurso "Quem Quer Ser Lógico" com vista a ganhar uma fortuna.*

1. *Na primeira fase do concurso, deveria proferir uma afirmação. Se ela fosse verdadeira, o Tó poderia receber €1 ou €100; se fosse falsa não receberia nada. Que afirmação poderia ele fazer para garantir que ganharia €100?*

2. *Na segunda etapa também deveria fazer uma afirmação. Se ela fosse verdadeira, o Tó ganharia €100, e se fosse falsa ganharia algum montante diferente de €100 (que poderia ser superior ou inferior). Os seus olhos iluminaram-se com dois cifrões, pois ele sabia de uma afirmação que lhe garantiria pelo menos €1000000. Qual?*

4 Potências de 2 e o crescimento exponencial

Voltemo-nos novamente para as potências de 2, desta vez com foco no crescimento exponencial e na sua relevância em particular a nível da computação.

Para aquecer, experimentemos o jogo em `http://2048game.com/`, que ilustra o facto de que a soma de duas potências de 2 iguais é a potência de 2 seguinte:

$$2^n + 2^n = 2^{n+1}.$$

4.1 Uma lenda sobre o inventor do xadrez

É comum ilustrar o poder do crescimento exponencial com uma história segundo a qual o inventor do xadrez teria pedido ao seu rei um prémio pela sua brilhante criação. Sugeriu que lhe fosse oferecido "apenas" 1 grão de arroz pela primeira casa do tabuleiro, 2 pela segunda, 4 pela terceira, etc., até à sexagésima-quarta. O rei achou o pedido incrivelmente modesto e não hesitou em aceder.

Mas estamos de facto a falar de que quantidade? Calculemos o total de grãos de arroz que o protagonista da nossa história deveria receber, e aproveitemos para recordar o que aprendemos sobre representação em base 2:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{63} = \underbrace{111\ldots1}_{64\ 1\text{'s}}{}_2 = 1\underbrace{000\ldots0}_{64\ 0\text{'s}}{}_2 - 1 = 2^{64} - 1 \approx 1.84 \times 10^{19}$$

De acordo com uma estimativa na Wikipedia[7], esta quantidade de arroz é cerca de 1000 vezes superior à produção mundial em 2010. Mas note-se que se houvesse mais uma casa no tabuleiro, então essa por si só corresponderia a 2^{64} grãos, que é praticamente o mesmo montante qua calculámos. Assim, num passo a quantidade total de arroz praticamente duplicaria!

4.2 A Torre de Hanoi

A Torre de Hanoi é um puzzle com 3 pinos e uma sequência de discos todos de tamanho diferente, que começam empilhados num dos pinos formando uma pirâmide, como ilustrado.

[7] `https://en.wikipedia.org/wiki/Wheat_and_chessboard_problem`

O objetivo do puzzle é transportar toda a torre para um dos dois pinos desocupados, trocando sucessivamente os discos de uns pinos para os outros e obedecendo às seguintes regras:

1. Só pode ser movimentado um disco de cada vez.
2. Um movimento consiste em pegar num disco do topo de uma pilha e colocá-lo sobre outra pilha.
3. Nunca pode um disco ser pousado sobre outro de tamanho menor.

Podemos experimentar uma versão virtual do puzzle em `https://www.mathsisfun.com/games/towerofhanoi.html`, ou então na página do Atractor, que tem vários outros jogos e curiosidades matemáticas: `http://www.atractor.pt/mat/JogosIsomorfos/`.

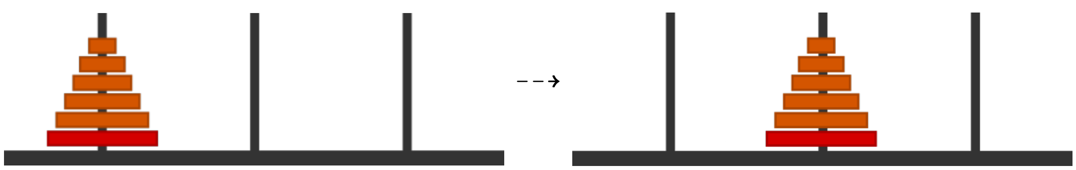
O problema é resolúvel por maior que seja o número de discos, mas o mais interessante é tentar descobrir qual o número mínimo de movimentos necessários para o resolver, supondo que começamos com n discos. Vamos designar esse número por a_n.

Quando temos apenas um disco, ou seja, $n = 1$, é evidente que o número de movimentos necessários para resolver o puzzle é 1. Assim,

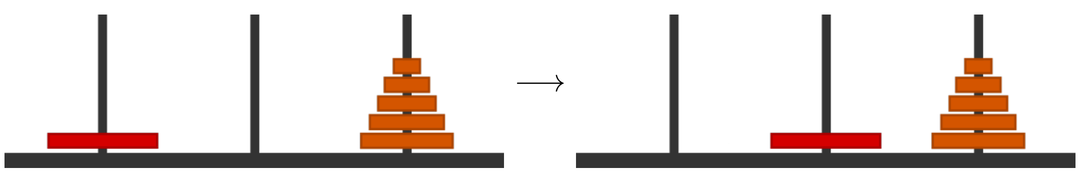
$$a_1 = 1.$$

Também rapidamente nos convencemos de que com 2 discos, são necessários 3 movimentos, o que significa que $a_2 = 3$. Porém, a partir de 3 discos, apesar de ainda ser fácil resolver o problema, temos de ter mais cuidado para saber se não estamos a fazer mais movimentos do que é necessário. Precisamos de encontrar uma forma metódica de abordar a questão.

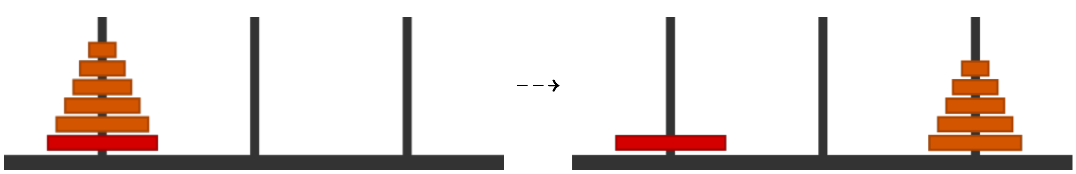
Vamos supor para já que temos o problema resolvido para um puzzle com n discos (ou seja, que já conhecemos a_n) e tentar usar isso para determinar a_{n+1}. Comecemos com torre de $n + 1$ discos, que pretendemos deslocar para o segundo pino:



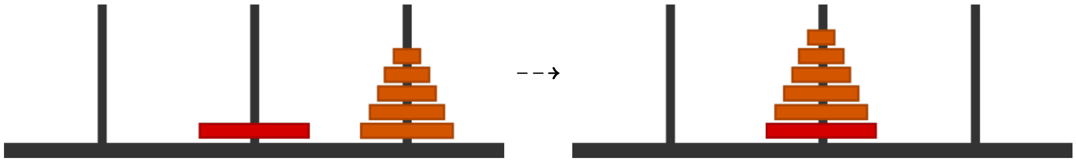
Seja qual for a solução que encontrarmos, em algum ponto vamos ter de deslocar o disco do fundo para o segundo pino, ou seja, fazer o seguinte movimento:



Este movimento só é possível se tivermos antes deslocado todos os n discos mais pequenos para o terceiro pino com alguma sequência de movimentos:



Para completar o puzzle, será depois necessário transportar a torre do terceiro pino para o segundo:



Como a presença do disco vermelho não limita de modo nenhum os movimentos que podemos fazer com os n castanhos, o número mínimo de movimentos necessários para deslocar a torre castanha é a_n. Esse trabalho tem de ser feito duas vezes, e temos ainda o movimento em que deslocamos o disco vermelho. Não é possível resolver em menos movimentos, portanto concluímos que

$$a_{n+1} = 2a_n + 1.$$

Temos então todos os a_n completamente determinados por uma relação de recorrência, isto é, dado qualquer um deles podemos calcular o que lhe sucede:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 2 \times 1 + 1 = 3 \\ a_3 &= 2 \times 3 + 1 = 7 \\ a_4 &= 2 \times 7 + 1 = 15 \\ &\dots \end{aligned}$$

Seria no entanto agradável encontrar uma expressão fechada para um a_n genérico, isto é, uma expressão que permitisse o cálculo, digamos, do vigésimo termo sem termos de calcular os dezanove anteriores.

Para encontrar uma tal fórmula, vamos recorrer novamente ao auxílio da escrita em base 2! Observemos que, pelo menos para os primeiros quatro termos da sucessão, a escrita em binário de a_n é simplesmente uma sequência de n 1's. Será que este padrão se mantém? Sim, porque o que a nossa relação de recorrência faz a cada termo é duplicá-lo (o que corresponde a acrescentar um 0 à expansão binária), e somar 1 (que substitui aquele 0 por 1). O resultado global é adicionar um 1 no final da expansão binária!

Concluímos portanto que de facto cada termos a_n é, em binário, uma sequência de n 1's.

$$a_n = \underbrace{111\dots1}_{n\ 1\text{'s}}{}_2 = 1\underbrace{000\dots0}_{n\ 0\text{'s}}{}_2 - 1 = 2^n - 1$$

De modo não muito diferente do que o que se passava com os grãos de arroz e as casas do tabuleiro de xadrez, de cada vez que aumentamos em 1 o número de discos na Torre de Hanoi, a quantidade de movimentos necessária para resolver o puzzle é aproximadamente duplicada.

Exercício 11. *Suponhamos que um aficionado da Torre de Hanoi consegue resolver o puzzle a uma taxa de 3 movimentos por segundo (o que é muito rápido), sem nunca parar (nem sequer para comer ou para dormir).*

1. *Quanto tempo demora ele a resolver uma torre com 10 discos? E com 15? E com 20?*

2. *Quantos discos tem de ter a torre para que o craque demore mais de um ano a resolvê-la?*

Este exercício certamente ilustra o poder do crescimento exponencial e torna aterradora a seguinte fotografia[8], tirada no museu Universum, no México:

Uma nota sobre indução matemática

O processo que usámos para provar a fórmula $a_n = \overbrace{111\dots1}^{n \text{ 1's}}{}_2$ a partir da relação de recorrência foi um exemplo de aplicação de uma das ferramentas mais importantes da matemática: o princípio da indução. Essencialmente, o que fizemos foi ver que esta escrita era válida para o termo a_1 e que, sendo válida para um certo a_n, seria também para o seguinte.

Mais geralmente, se desejamos provar alguma propriedade para todos os números naturais, podemos fazê-lo provando que

1. essa propriedade é válida para o primeiro número natural[9] (caso-base),

2. se for verificada por algum natural n, também é verificada pelo seguinte, $n + 1$ (passo indutivo).

Imaginemos que não nos tínhamos lembrado de escrever os primeiros a_n em binário, mas que, em vez disso, tínhamos observado que eles pareciam obedecer à fórmula $a_n = 2^n - 1$. Podíamos então ter usado indução para demonstrar que a fórmula é válida em geral:

Primeiro, deveríamos verificar o caso-base, ou seja, que quando $n = 1$ a fórmula é verificada. Isso é fácil! De seguida, deveríamos assumir que $a_n = 2^n - 1$, e usar essa hipótese (a

[8]Fonte: `https://en.wikipedia.org/wiki/Tower_of_Hanoi`

[9]Dependendo da convenção que estiver a ser usada, o primeiro natural poderá ser 0 ou 1. Para os nossos propósitos, será mais útil considerar os naturais a começar em 1.

hipótese de indução) para concluir que $a_{n+1} = 2^{n+1} - 1$. Isso pode ser feito do seguinte modo:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n + 1 \qquad \text{(pela relação de recorrência)} \\ &= 2(2^n - 1) + 1 \qquad \text{(por hipótese de indução)} \\ &= 2 \times 2^n - 2 \times 1 + 1 \\ &= 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

4.3 Computação e eficiência

Consideremos o triângulo de números abaixo. Suponhamos que começamos no topo e vamos descendo gradualmente, de maneira que em cada passo podemos apenas transitar para um dos números adjacentes na linha seguinte. Por exemplo, se estivermos no 4 destacado podemos passar para o 6 ou para o 2 na linha seguinte. Terminamos o trajeto quando chegarmos à última linha. Se formos somando os números por onde passamos, qual é o menor valor que podemos obter no final?[10]

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&&8&&&&&&&& \\
&&&&&&&1&&5&&&&&&& \\
&&&&&&0&&5&&3&&&&&& \\
&&&&&9&&\mathbf{4}&&4&&1&&&&& \\
&&&&3&&6&&2&&2&&5&&&& \\
&&&1&&4&&3&&7&&8&&5&&& \\
&&4&&9&&2&&1&&2&&8&&6&& \\
&2&&8&&6&&4&&8&&0&&2&&1& \\
3&&9&&7&&2&&2&&5&&4&&9&&3
\end{array}$$

A abordagem natural é testar todos os caminhos possíveis. Afinal, só há uma quantidade finita deles. Mas estamos a falar afinal de quantos caminhos? Como o triângulo tem 9 linhas, temos de dar 8 passos. Em cada um deles, escolhemos uma de duas opções, portanto ao todo teremos $2^8 = 256$ possibilidades para testar! Queremos mesmo fazê-lo?

Vejamos em vez disso uma forma (muito) mais eficiente de proceder. Imaginemos que por algum trajeto chegámos ao 6 da penúltima linha. Se queremos minimizar a soma dos números percorridos, de certeza absoluta que a melhor decisão nessa situação não será escolher o 7, mas sim o 2. Assim sendo, podemos esquecer que essa escolha existe e simplesmente substituir o 6 por $6 + 2 = 8$. Se fizermos isso com todos os números da penúltima linha, podemos deitar fora a última linha do triângulo:

[10] Inspirado nos problemas 18 e 67 do Project Euler (`https://projecteuler.net/`), que contém uma vasta compilação de problemas de Matemática, para resolver programando algoritmos eficientes.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 8 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 5 & & & & & & \\
 & & & & & 0 & & 5 & & 3 & & & & & \\
 & & & & 9 & & 4 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 3 & & 6 & & 2 & & 2 & & 5 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 3 & & 7 & & 8 & & 5 & & \\
 & 4 & & 9 & & 2 & & 1 & & 2 & & 8 & & 6 & \\
5 & & 15 & & 8 & & 6 & & 10 & & 4 & & 6 & & 4
\end{array}
$$

Ao fazermos esta redução, como diminuímos o triângulo em uma linha, o número de caminhos possíveis desceu de 256 para $2^7 = 128$. Mas porquê parar por aqui? Podemos voltar a aplicar a mesma técnica e ir sucessivamente reduzindo o triângulo até termos um único número, que é justamente aquele que queríamos determinar.

Exercício 12. *Terminar de resolver o problema.*

É assim tão relevante a diferença entre estas duas abordagens? Sim, muito. A abordagem de "força bruta", como tínhamos visto, consiste no cálculo de 256 somas, cada uma delas com 9 parcelas. O nosso método faz apenas um passo por cada elemento do triângulo, excluindo os da última linha. São 36 passos, e em cada um deles fazemos apenas uma comparação entre dois números e uma soma de duas parcelas.

O poder deste método torna-se ainda mais claro quando consideramos o que aconteceria com triângulos maiores. Imaginemos que tínhamos partido de um com n linhas e queríamos pôr um computador a achar a menor soma possível. A resolução por força bruta termina ao fim de 2^{n-1} passos, o que significa que o tempo de execução duplica de cada vez que aumentamos em uma linha o nosso triângulo. Trata-se novamente de crescimento exponencial (e já sabemos como ele é perigoso!).

E o segundo método? Para determinar o número de passos a executar, devemos contar o número de elementos nas primeiras $n-1$ linhas, ou seja, calcular a soma

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + 2 + \ldots + (n-1).$$

Uma forma de achar este valor (e que serve, mais geralmente, para adicionar números em progressão aritmética) é somar as parcelas duas vezes, como segue:

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & + & 2 & + & \cdots & + & (n-1) \\
(n-1) & + & (n-2) & + & \cdots & + & 1 \\
\hline
n & + & n & + & \cdots & + & n
\end{array}
$$

Isto corresponde a somar $n-1$ vezes o valor n, portanto $n(n-1)$ é o dobro da quantiade que pretendíamos achar. Assim, um triângulo com n linhas tem nas primeiras $n-1$ linhas um total de $\frac{n(n-1)}{2}$ elementos, e é este o número de passos a efetuar pelo segundo método. Como esse valor varia com n de acordo com um polinómio de grau 2, dizemos que o seu crescimento é de ordem quadrática (e não exponencial).

Exercício 13. *Supor que programamos um computador para resolver este problema com um triângulo de 50 linhas. Quantos passos que teriam de ser efetuados para resolver o problema*

1. *pela abordagem de "força bruta",*
2. *pelo segundo método.*

Sobre um triângulo com 100 linhas, diz-nos a página do Project Euler: "If you could check one trillion (10^{12}) routes every second it would take over twenty billion years to check them all." Na terminologia americana, "twenty billion years" são 20 mil milhões de anos. A idade do universo é inferior a 14 mil milhões de anos.

Apesar de parecer um mero exercício académico, este tipo de problema tem enorme relevância. Na sua essência, trata-se de escolher um "melhor" itinerário entre muitas possibilidades, que é uma das tarefas efetuadas, por exemplo, por um aparelho de GPS.

Mais geralmente, a resolução computacionalmente eficiente de problemas que envolvem grande quantidade de informação tem enorme aplicabilidade em várias áreas da ciência e tecnologia, e é a razão por que, por exemplo, um motor de pesquisa demora poucos instantes a encontrar informação que procuremos.