Thema 08 Hyperbolische Räume

Sonntag, 21. November 2021 16:11

δ-Hyperbolische Räume / Gruppen

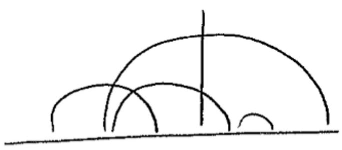
8. Hyperbolische Räume und Gruppen

Krümmung: misst intrinsische Geometrie eines Raumes

(Modell)räume konstanter Krümmung K:

S^n, $K>0$ $\quad$ $\mathbb{R}^n$, $K=0$ $\quad$ Sattelfläche, $K<0$

oder



$\mathbb{H}^n$
$K<0$

$K<0$:

Geometrien "breiten sich schneller aus" als in $\mathbb{R}^2$, Dreiecke sind "dünn":

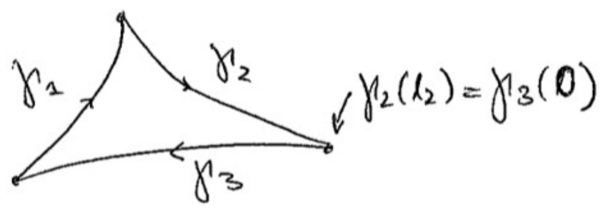
z.B. $\quad$ oder $\quad$ oder

Wir formalisieren diese Eigenschaften und führen (verschiedene Def von) δ-hyperbolischen Räumen ein.

Def 8.1 (X,d) metrisches Raum.

Ein geodätisches Dreieck Δ in X ist ein Tripel von Geodäten γ_i $i=1,2,3$ mit $\gamma_i : [0, l_i] \to X$ so, dass gilt:

$\gamma_1(l_1) = \gamma_2(0)$, $\gamma_2(l_2) = \gamma_3(0)$, $\gamma_3(l_3) = \gamma_1(0)$.



Def 8.2

Ein geodätisches Dreieck ist δ-dünn, wenn

$\operatorname{Im}(\gamma_i) \subset U_\delta(\operatorname{Im}(\gamma_j) \cup \operatorname{Im}(\gamma_k))$

mit $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$. $\qquad U_\delta$ = offene δ-Umg

Ein metr. Raum ist δ-hyperbolisch, falls es geodätisch ist und alle geodätischen Dreiecke δ-dünn sind.

Er heißt hyperbolisch, falls ein $\delta > 0$ existiert s.d. er δ-hyperbolisch ist.

wir werden, wenn nichts anderes gesagt wird, immer diese Def verwenden!

Bsp. 8.3

1) Geodätische Räume mit endlichem Durchmesser sind δ-hyperbolisch.

2) $(\mathbb{R}, d_{eukl})$ ist 0-hyperbolisch.

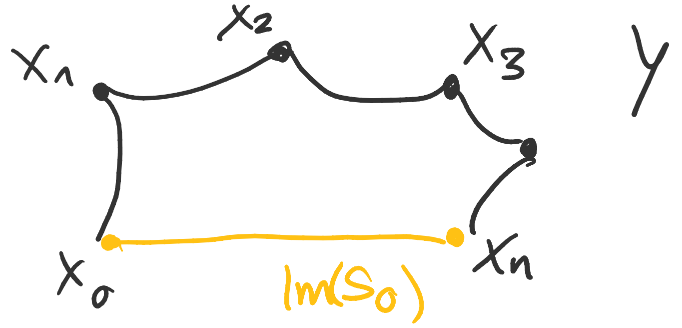
3) $(\mathbb{R}^2, d_{eukl})$ ist <u>nicht</u> δ-hyperbolisch.

4) $(\mathbb{H}^2, d_{eukl})$ ist $\ln(3)$-hyperbolisch
   $\rightsquigarrow$ später mehr dazu.

5) Simpliziale Bäume (sowie $\mathbb{R}$-Bäume) sind δ-hyperbolisch.

Satz 8.4 (iterierte Dünnheit)

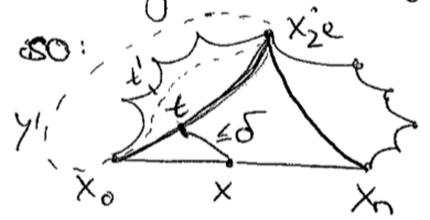
Sei (X,d) ein δ-hyperbolischer Raum. Sei P ein geodätisches Polygon, d.h. mit Ecken $x_0, x_1, \dots, x_n$ und Kanten (Geodäten) $s_i : x_{i-1} \rightsquigarrow x_i$, $i = 1, \dots, n$, und $s_0 : x_0 \rightsquigarrow x_n$.
Setze $Y := \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Im}(s_i)$. Dann gilt:
$\forall x \in \mathrm{Im}(s_0)$ ist $d(x, Y) \leq k \cdot \delta$ mit $k := \lceil \log_2 n \rceil$.



Beweis: Wir zeigen die Beh. zunächst für $n = 2^l$ für ein $l \in \mathbb{N}$ mit Induktion über l.
D.h. z.z. $d(x,Y) \leq l \cdot \delta \quad \forall l \in \mathbb{N}$.

$l=1$: Dann ist $n = 2$ und Beh folgt aus Def δ-hyperbolisch (6.2).

$l \to l+1$: $n = 2^{l+1}$. Wähle $x \in \mathrm{Im}(\delta_0)$ fest.
Wähle geodät. Segmente $[x_0, x_{2^l}]$ und $[x_n, x_{2^l}]$ so:



Wir wissen, dass das Dreieck $x_0 x_{2^l} x_n$ mit den gewählten geod. Segmenten δ-dünn ist. Dann existiert $t \in [x_0, x_{2^l}] \cup [x_{2^l}, x_n]$ s.d. $d(x,t) \leq \delta$.
Sei OE $t \in [x_0, x_{2^l}]$. (siehe Bild oben).

Nach Ind. Vor. ist

$$d(t, \underbrace{\bigcup_{i=1}^{2^l} \mathrm{Im}(s_i)}_{=: Y'}) \leq l \cdot \delta \quad \text{(siehe Bild)}$$

$\Rightarrow \exists t' \in Y'$ mit $d(t,t') = d(t,Y') \leq l \cdot \delta$.

$$\Rightarrow d(x,Y) \leq d(x,t') \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(x,t) + d(t,t')$$

$$\leq \delta + l \cdot \delta = (1+l) \cdot \delta \qquad \square_{n=2^l}$$

Sei jetzt n beliebig. Füge r zusätzliche Stützpkte auf den n geodät. Stücken hinzu so, dass $n + r = 2^l$ mit $l = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$. $\Rightarrow$ Beh mit obigem Bew. $\square$

Ziel: Zeige "hyperbolisch" ist invariant unter QI.

Problem: Das Bild eines geod. Dreiecks unter einer QI ist kein geod. Dreieck mehr.

Def 8.5 (quasi-geod. Dreieck)

(X,d) metr. Raum. Ein (c,d)-quasi-geodätisches Dreieck in X $(c \geq 1,\ d \geq 0)$ ist ein Tripel γ_i von (c,d)-quasi-Geodäten

$$\gamma_i : [0, l_i] \to X \quad i = 1,2,3$$

$$\gamma_i(l_i) = \gamma_{i+1}(0) \quad \text{(Indizes zyklisch)}.$$

Def 8.6 (quasi-hyperbolisch) i.A. sehr schwer nachzurechnen, weil es "zu viele" quasi-Geodäten gibt.

Ein (c,d)-quasi-geodätisches Dreieck ist δ-dünn wenn $\mathrm{Im}(\gamma_i) \subset U_\delta(\mathrm{Im}(\gamma_j) \cup \mathrm{Im}(\gamma_k))$ $\forall \{i,j,k\} = \{1,2,3\}$.

Ein metr. Raum (X,d) heißt (c,d,δ)-quasi-hyperbolisch, falls X (c,d)-quasi-geodätisch ist und alle solchen quasi-geod. Dreiecke δ-dünn sind.

Wir sagen X ist (c,d)-quasi-hyperbolisch, falls ein $\delta > 0$ exist. s.d. X (c,d,δ) q.h. ist.

Schreibe abkürzend q.h. für quasi-hyperbolisch.

Prop. 8.7 ("quasi-hyperb." ist QI-invariant)

$(X, d_X), (Y, d_Y)$ metr. Räume. Dann gilt:
Ist $X \sim_{QI} Y$ so sind folgende Äquivalenzen wahr:
(1) X quasi-geodätisch $\Leftrightarrow$ Y quasi-geodätisch
(2) X quasi-hyperbolisch $\Leftrightarrow$ Y quasi-hyperb.

Beweis (1): Sei OE Y quasi-geodätisch und $f: X \to Y$ eine Q.I.
Sei $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ so groß, dass Y (c,c)-quasi-geodätisch ist und f eine quasi-Isometrie mit c-dichtem Bild.
Seien $x, x' \in X$. Dann existiert nach Vor. eine (c,c)-quasi-Geodäte zwischen $f(x)$ und $f(x')$.

Wir können (mittels Auswahlaxiom) eine Abb. $\tilde{\gamma}: [0, \ell] \to X$ finden s.d. gilt
$\tilde{\gamma}(0) = x$, $\tilde{\gamma}(\ell) = x'$ und $d_Y(f(\tilde{\gamma}(t)), \gamma(t)) \leq c$ $\forall t$.

Man kann nachrechnen, dass $\tilde{\gamma}$ eine $(c, \max(3c^2, 3))$-quasi-Geodäte ist, die x mit x' verbindet. $\Rightarrow$ X ist quasi-geodätisch.

Um (2) zu zeigen sei OE Y quasi-hyperbolisch und $X \xrightarrow{f} Y$ QI. Dann ist mit (1) X ebenfalls quasi-geodätisch.
Es existieren also $c \geq 1, d \geq 0$ s.d. Y (c,d)-quasi-hyperb. und X (c,d)-quasi-geodätisch ist.

Sei $c' \geq c$, $d' \geq d$ geg. und sei weiter ein (c', d')-quasi-geodätisches Dreieck durch γ_i $i=1,2,3$ drei quasi-Geodäten aufgespannt.

Das Bild $(f\circ\gamma_1, f\circ\gamma_2, f\circ\gamma_3)$ ist ein (c'', d'')-quasi-geod. Dreieck in Y, wobei $c'' \geq c$, $d'' \geq d$.

Die Konstanten c'', d'' hängen nur von c', d' ab.
Weil Y nach Vor (c, d, δ)-quasi-hyperb. ist für ein $\delta > 0$ ist das Dreieck $(f\circ\gamma_1, f\circ\gamma_2, f\circ\gamma_3)$ auch δ-dünn.

Man kann nachrechnen, dass gilt:

$$\operatorname{Im}(\gamma_1) \subset U_{c\delta + cd}(\operatorname{Im}(\gamma_2) \cup \operatorname{Im}(\gamma_3))$$

sowie die permutierten Inklusionen. (Verwende dazu, dass f eine (c,d)-q.i. Einbettg ist.)
$\Rightarrow X$ ist $(c', d', c\delta + cd)$-quasi-hyperbolisch $\square$

<u>Bem</u> Wir haben im Bew von (2) eigentlich gezeigt:

| X, Y metr. Räume
| Y quasi hyperb., X quasi-geodät.,
| dann ist X auch quasi-hyp., wenn
| eine q.i. Einbettg $f: X \to Y$ existiert. |

Satz 8.8

(X,d) geod. metr. Raum. Dann gilt:

X hyperbolisch $\Leftrightarrow$ X quasi-hyperbolisch.

Haben wir diesen Satz gezeigt, so können wir direkt daraus ableiten:

Kor 8.9 ("hyperbolisch" ist QI-Invariante)

X, Y geodätische metr. Räume, $X \simeq_{QI} Y$. Dann gilt: X ist genau dann hyperbolisch, wenn Y hyperbolisch ist.

Beweis: 6.10 liefert: X hyp $\overset{6.10}{\Leftrightarrow}$ X quasi-hyp

$$\Updownarrow 6.9(2)$$

$\square$ $\quad Y$ hyperb. $\underset{6.10}{\Leftrightarrow}$ Y quasi-hyp

In den Beweis von 8.8 fließt ein, dass quasi-Geodäten in folgendem Sinne "stabil" sind:

Satz 8.10 (Stabilität von quasi-Geodäten)

Seien $c, \delta \geq 0$, $b \geq 1$ Konstanten. Dann existiert ein $k = k(c,b,\delta) \geq 0$ s.d. gilt:

Ist X ein δ-hyp. Raum, $\gamma : [0,l] \to X$ eine (c,b)-quasi-Geodäte, $\gamma' : [0,l'] \longrightarrow X$ Geodäte in X mit $\gamma'(0) = \gamma(0)$, $\gamma'(l') = \gamma(l)$, dann gilt:

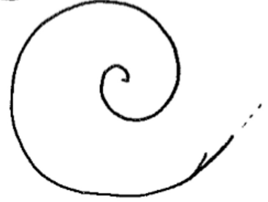
$$\operatorname{Im}(\gamma') \subset U_k(\operatorname{Im}(\gamma))$$

und $\operatorname{Im}(\gamma) \subset U_k(\operatorname{Im}(\gamma'))$. "Trapping"

8.11 Bem

(1) Satz 6.11 sagt, dass (c,d) quasi-Geodäten immer uniform nah an Geodäten sind.

(2) Die Vor „X ist δ-hyperbolisch" ist hierfür wesentlich!
In $(\mathbb{R}^2, d_{euk})$ ist die logarithmische Spirale ein quasi-geodätischer Strahl in $(\mathbb{R}^2, d_{euk})$ der aber nicht endl. Abst. zu einer Geodäten (= Geraden) in $\mathbb{R}^2$ hat.



← windet sich immer weiter von jeder Geraden weg.

Wir beweisen Satz 8.8

„$\Leftarrow$" X quasi-hyperb. $\Rightarrow$ X hyperbolisch, da jedes geodätische Dreieck auch ein quasi-geodätisches Dreieck ist.

„$\Rightarrow$" Sei X δ-hyperb. für ein $\delta \geq 0$.
Seien (c, b, σ) wie in 6.11 gegeben.
Wir zeigen: $\exists \delta' \geq 0$ s.d. X (c, b, δ')-q.h. ist.

Sei dazu $\Delta = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ ein (c,b)-quasi-geod. Dreieck in X. Weil X geodätisch ist, existieren Geodäten γ_i' mit den selben Anfangs- und Endpkten, wie γ_i $i=1,2,3$.

X hypb. $\Rightarrow$ Das Dreieck $\Delta' = (\gamma_1', \gamma_2', \gamma_3')$ ist δ-dünn. Mit 6.11 folgt dann:

$$\left[\exists k \text{ s.d. } \begin{array}{l} \mathrm{Im}(\gamma_i') \subset U_k(\mathrm{Im}(\gamma_i)) \ \forall i \text{ und} \\ \mathrm{Im}(\gamma_i) \subset U_k(\mathrm{Im}(\gamma_i')) \ \forall i \end{array} \right] \otimes$$

Konstante

$\rightsquigarrow$ Wir schachteln dieses Wissen mit der δ-Umg., die wir aus der δ-hyperbolisch-Eigenschaft von X (vergl 8.2) erhalten.

X δ-hyp. $\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} \mathrm{Im}(\gamma_i') \subset U_\delta(\mathrm{Im}(\gamma_j') \cup \mathrm{Im}(\gamma_\ell')) \\ \forall \{i,j,\ell\} = \{1,2,3\} \end{array} \right] \otimes\!\!\otimes$

Geodäte in X

$\otimes \,\&\, \otimes\!\!\otimes \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(\gamma_i) &\overset{\otimes}{\subset} U_k(\mathrm{Im}(\gamma_i')) \\ &\subset U_k(U_\delta(\mathrm{Im}(\gamma_j') \cup \mathrm{Im}(\gamma_\ell'))) \\ &\subset U_{2k+\delta}(\mathrm{Im}(\gamma_j) \cup \mathrm{Im}(\gamma_\ell)) \end{aligned}$$

Also ist X
$(c, b, 2k+\delta)$-quasi-hyperbolisch. $\square$

Fehlt also noch der Beweis der Stabilität der quasi-Geodäten.

Es fehlt noch der Beweis von 8.10, d.h. die

Es fehlt noch der Beweis von 8.10, d.h. die Stabilität der quasi-Geodätischen in hyperbolischen Räumen. Dazu benötigen wir zwei Lemmata:

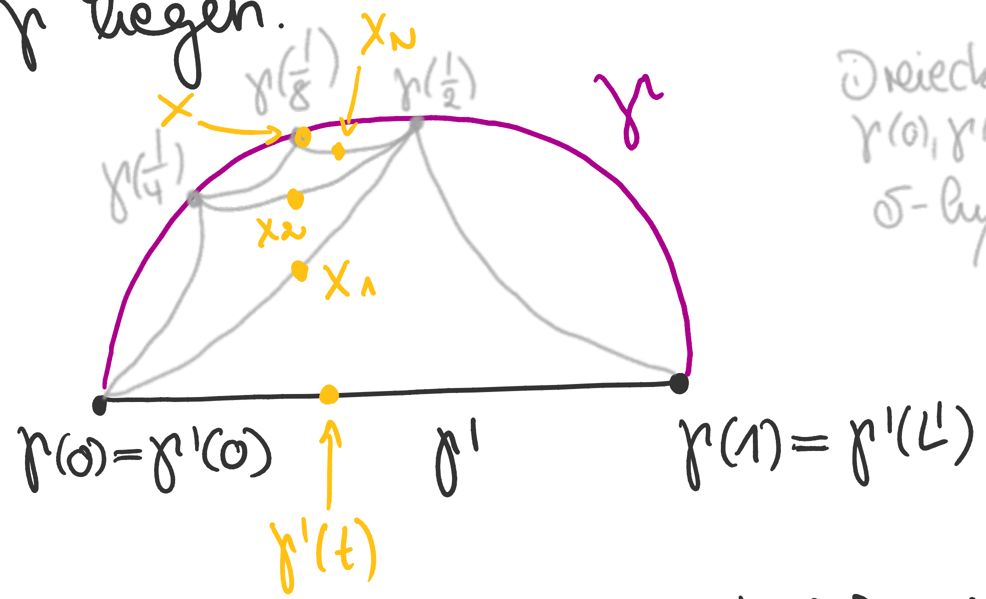
Lemma 8.12 Tannenbaum-Lemma

Sei (X,d) ein δ-hyperbolischer Raum.
Sei $\gamma: [0,\ell] \to X$ eine stetige Kurve und $\gamma': [0,\ell'] \to X$ eine Geodätische mit $\gamma(0) = \gamma'(0)$ und $\gamma(\ell) = \gamma'(\ell')$.
Dann gilt $\forall t \in [0,\ell']$:
$$d(\gamma'(t), \operatorname{Im}(\gamma)) \leq \delta \cdot |\log_2(L(\gamma))| + 1.$$

Hier ist $L(\gamma)$ die Länge von γ, d.h.
$$L(\gamma) = \sup\left\{ \sum_{j=1}^{k-1} d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})) \;\middle|\; k \in \mathbb{N}, t_i \in [0,\ell], t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \right\} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Beweis:
Man kann oE annehmen, dass $L(\gamma) > 1$ ist und, dass $\ell = 1$. (Metrik bzw γ reskalieren)
Sei $N \in \mathbb{N}$ s.d.
$$(*) \quad \frac{L(\gamma)}{2^{N+1}} < 1 \leq \frac{L(\gamma)}{2^N}. \qquad \Big\} \; N \leq \log_2(L(\gamma))$$

Sei $t \in [0, \ell']$.
Weil X δ-hyperbolisch ist können wir eine Punkte $x_1, \ldots, x_N \in X$ finden, so dass
$d(\gamma'(t), x_1) \leq \delta$, $d(x_1, x_2) \leq \delta$,
$d(x_2, x_3) \leq \delta, \ldots$ und so, dass
x_N auf einer Geodätischen der Länge $\leq \frac{L(\gamma)}{2^N}$
liegt, deren Endpunkte auf
γ liegen.



Dreieck auf Pkten $\gamma(0), \gamma(1), \gamma(\frac{1}{2})$ ist δ-hyperbolisch

Insbesondere existiert $x \in \mathrm{Im}(\gamma)$ mit

$$d(\gamma'(t), x) \leq d(\gamma'(t), x_N) + d(x_N, x)$$
$$\leq \delta \cdot N + \frac{L(\gamma)}{2^{N+1}}$$
$$\underset{\substack{(*)\\ 2x \text{ anwenden}}}{\leq} \delta \, |\log_2(L(\gamma))| + 1.$$

$\square$

Lemma 8.13 (quasi-Geodätische zähmen)

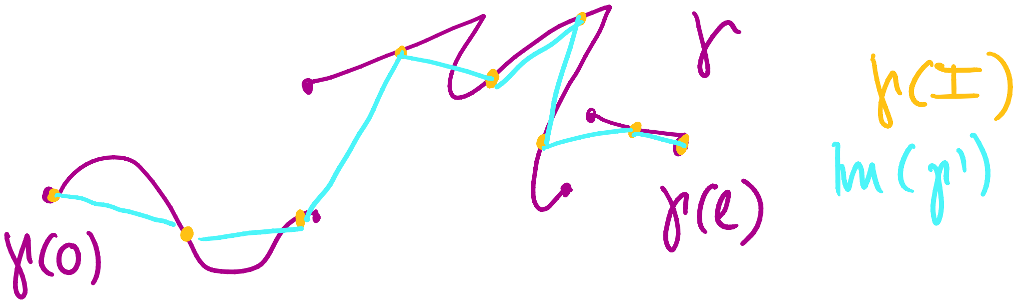
Seien $c, b \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann existieren c', b' mit folgenden Eigenschaften:
Ist (X, d) ein geodätischer metr. Raum und $\gamma : [0, \ell] \to X$ eine (c, b)-quasi-Geodätische, dann existiert eine stetige (c', b') quasi-Geodätische $\gamma' : [0, \ell] \to X$ mit selbem Anfangs- und Endpunkt so, dass folgende Eigenschaften gelten:

1. $\forall s, t \in [0, \ell]$ mit $s \leq t$ ist
$$L(\gamma'|_{[s,t]}) \leq c' \cdot d(\gamma'(s), \gamma'(t)) + b'.$$

2. Weiter gilt:
$$\mathrm{Im}(\gamma') \subset U_{c+b}(\mathrm{Im}(\gamma)) \text{ und}$$
$$\mathrm{Im}(\gamma) \subset U_{c+b}(\mathrm{Im}(\gamma')).$$

Beweis:
Setze $I := [0, \ell) \cap \mathbb{Z} \cup \{\ell\}$.
Definiere $\gamma'(i) = \gamma(i) \ \forall i \in I$.
Erweitere γ' zu einer stetigen Funktion auf I durch Einsetzen geodätischer Stücke zwischen den Stützpunkten in I.
Man kann dann nachrechnen, dass die

Man kann dann nachrechnen, dass die Behauptungen im Lemma erfüllt sind.



$\square$

<u>**Beweis 8.10**</u>: Stabilität von quasi-Geodätischen

<u>Wdh</u>: geg $\delta, c, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
Dann existiert $k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ s.d. gilt:
X δ-hyperbolisch, $\gamma : [0,\ell] \to X$ (c,b)-quasi Geodätische und $\gamma' : [0,\ell'] \to X$ Geodätische mit selben Randpkten, dann ist

$$\mathrm{Im}(\gamma) \subset U_k(\mathrm{Im}(\gamma')) \text{ und}$$
$$\mathrm{Im}(\gamma') \subset U_k(\mathrm{Im}(\gamma)).$$

Wegen Lemma 8.13 können wir annehmen, dass γ stetig ist. (Wenn nötig c,b durch größere Konstanten ersetzen).
Es gilt mit 8.13.1 auch:

$$L(\gamma|_{[r,s]}) \leq c \cdot d(\gamma(r), \gamma(s)) + b \qquad (1)$$

$\forall\, r \leq s$ in $[0,\ell]$.

Schritt 1: Zeige Geodätische γ' ist nah an

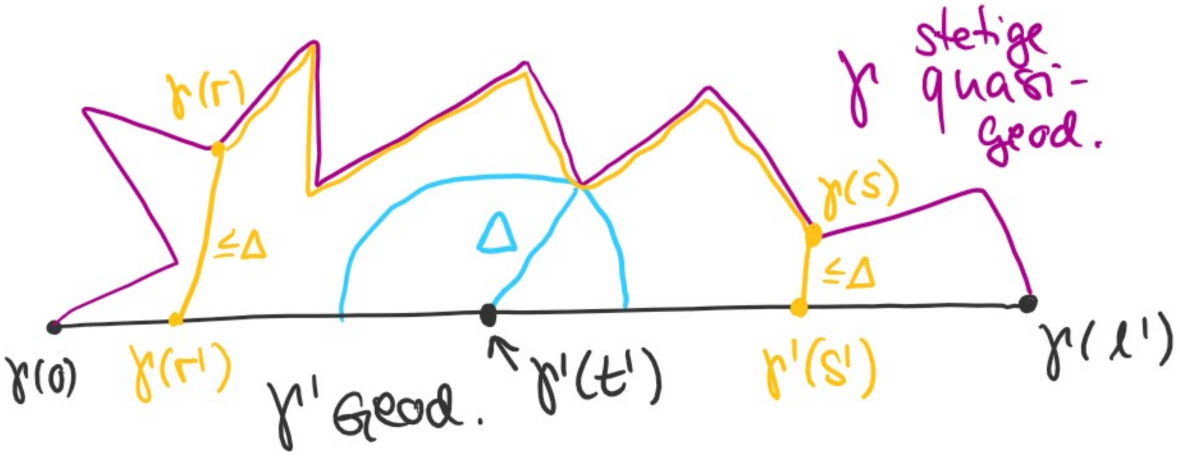
Schritt 1: Zeige Geodätische γ' ist nah an der quasi-Geodätischen γ

Setze $\Delta := \sup\{ d(\gamma'(t'), \mathrm{Im}(\gamma)) \mid t' \in [0,\ell'] \}$.

Es gilt: $\mathrm{Im}(\gamma') \subset U_\Delta(\mathrm{Im}(\gamma))$.

Wir schätzen Δ (s.u.) nach oben ab.

Weil γ stetig ist wird das sup in einem Punkt in $[0,\ell']$ angenommen. D.h. $\exists\, t' \in [0,\ell']$ mit $\Delta = d(\gamma'(t'), \mathrm{Im}(\gamma))$.



Für die Abschätzung von Δ definiere:

$r' := \max\{0, t' - 2\cdot\Delta\}$

$s' := \min\{\ell', t' + 2\Delta\}$

Es existiert dann $r, s \in [0,\ell']$ mit:

$d(\gamma(r), \gamma'(r')) \leq \Delta$ & $d(\gamma(s), \gamma'(s')) \leq \Delta$.

$$d(\gamma(r),\gamma'(r')) \le \Delta \quad \& \quad d(\gamma(s),\gamma'(s')) \le \Delta.$$

Betrachte eine Kurve γ'' definiert wie folgt:

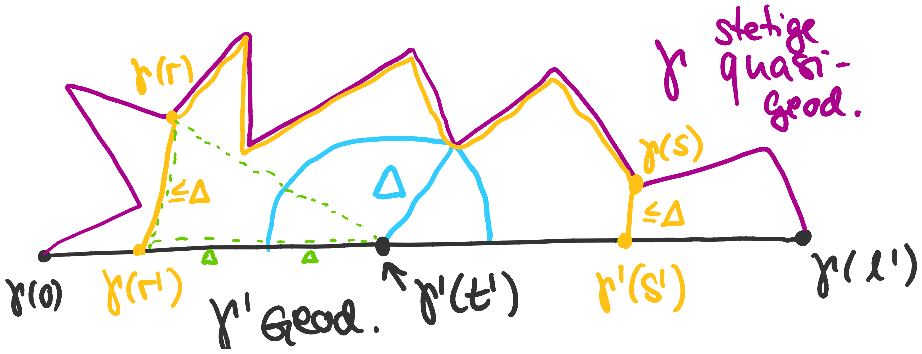
- γ'' startet in $\gamma'(r')$
- folgt Geodätische nach $\gamma(r)$
- folgt γ bis $\gamma(s)$
- folgt Geodätische nach $\gamma(s')$

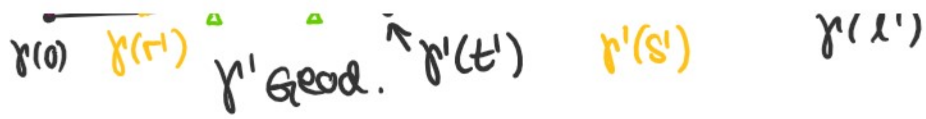
Lemma 8.12 liefert dann

$$\Delta \le d(\gamma'(t'), \operatorname{Im}(\gamma'')) \le \delta \cdot |\log_2 L(\gamma'')| + 1.$$

Mit (1) folgt:

$$\begin{aligned}
L(\gamma'') &\le 2\Delta + L(\gamma|_{[r,s]}) \\
&\overset{(1)}{\le} c \cdot d(\gamma(r),\gamma(s)) + b + 2\Delta \\
&\le c \cdot \Big(\underbrace{d(\gamma(r),\gamma'(t'))}_{\le\, d(\gamma(r),\gamma'(r')) + d(\gamma'(r'),\gamma'(t'))} + d(\gamma'(t'),\gamma(s))\Big) + b + 2\Delta \\
&\le c \cdot \big(\Delta + 2\Delta + 2\Delta + \Delta\big) + b + 2\Delta \\
&= (6c+2)\cdot\Delta + b
\end{aligned}$$





$\Rightarrow \Delta \le \delta \cdot |\log_2 L(\gamma'')| + 1$ (s.o.)

$\le \delta \cdot \log_2((6c+2)\cdot \Delta + b) + 1$

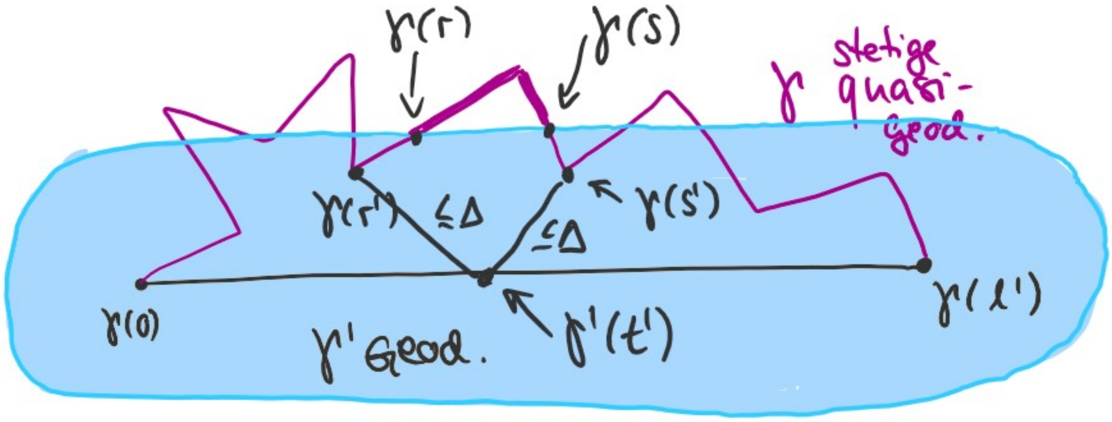
wächst langsamer als linear

$\Rightarrow \exists$ obere Schranke an Δ, die von δ, c, b abhängt.

Schritt 2: Zeige: umgekehrt ist auch quasi-geodätische γ nah an γ', d.h. wir wollen $\sup\{d(\gamma(t), \mathrm{Im}(\gamma')) \mid t \in [0,l]\}$ abschätzen.

Wie oben $\Delta := \sup\{d(\gamma'(t'), \mathrm{Im}(\gamma)) \mid t' \in [0,l']\}$.

Idee: Zeige, dass von γ nur kleine Stücke außerhalb $U_\Delta(\mathrm{Im}(\gamma'))$ liegen.



Seien $r, s \in [0, \ell]$ so gewählt, dass $[r,s]$ inklusions-maximales Intervall ist mit $\gamma|_{[r,s]}$ außerhalb $U_\Delta(\mathrm{Im}(\gamma'))$.

Falls es keine solche $r \neq s$ gibt ist nichts zu zeigen.

Weil γ stetig ist gibt es $t' \in [0, \ell']$ und $r' \in [0, r]$, sowie $s' \in [s, \ell]$ mit

$$d(\gamma'(t'), \gamma(r')) \leq \Delta \quad \text{und}$$
$$d(\gamma'(t'), \gamma(s')) \leq \Delta$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} L(\gamma|_{[r,s]}) &\leq L(\gamma|_{[r',s']}) \\ &\leq c \cdot d(\gamma(r'), \gamma(s')) + b \\ &\underset{\Delta\text{-Ungl}}{\leq} c \cdot 2 \cdot \Delta + b \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma([r,s]) \subset U_{c\Delta + \frac{b}{2} + \Delta}(\mathrm{Im}(\gamma')).$$

Dieses Argument können wir auf alle Stücke von γ außerhalb der Δ-Umgebung von $\mathrm{Im}(\gamma')$ anwenden.

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Im}(\gamma) \subset U_{c\cdot\Delta+\frac{k}{2}+\Delta}(\mathrm{Im}(\gamma')).$$

Setze $k := c\Delta + \frac{k}{2} + \Delta$.

Zusammen mit Schritt 1 folgt die Beh. $\square$

Def 8.14 hyperbolische Gruppen

Eine endlich erzeugte Gruppe G heißt (Gromov) hyperbolisch, falls für ein (und damit jedes) Erzeugendensystem S, $|S|<\infty$, von G der Cayleygraph $(Cay(G,S), d_S)$ ein hyperbolischer metr. Raum ist.

Aus der Eigenschaft, dass "hyperbolisch" QI-invariant ist, folgt direkt:

Satz 8.15

G, H endl. erzeugt; ist $G \sim_{QI} H$ so gilt:
G hyperbolisch $\Leftrightarrow$ H hyperbolisch.

Bsp. 8.16

0) endl. Gruppen sind hyperbolisch.

1) $(\mathbb{Z},+)$ ist hyperbolisch (weil QI zu $(\mathbb{R},+)$)

2) $(\mathbb{Z}^k,+)$ ist für $k\geq 2$ nicht hyperbolisch.
(weil $\mathbb{R}^2$ nicht hyperbolisch ist).

3) freie Gruppen sind hyperbolisch

4) kokompakte, diskrete UG von $PSL_2\mathbb{R}$ sind hyperbolisch (weil diese q.i. zu $\mathbb{H}^2$ sind). z.B. $PSL_2\mathbb{Z}$.

Bsp. 8.17

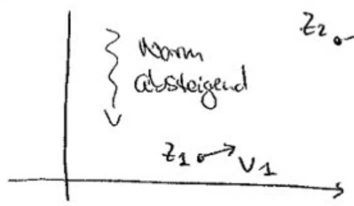
$PSL(2,\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{H}^2$

$PSL(2,\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{H}^2$

Oberes Halbebenenmodell für $\mathbb{H}^2$:

$$\mathbb{H}^2 = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0 \}$$
$$\cong \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \}.$$

- Riemannsche Struktur $ds^2 = \dfrac{dx^2 + dy^2}{y^2}$
- hyp. Norm für Tangentialvektoren
  $v \in \underline{T_z}\mathbb{H}^2 \cong \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ $\qquad \|v\|^{hyp} := \dfrac{\|v\|^{eukl}}{\operatorname{Im} z}$



mit $\|v_1\| = \|v_2\|$

- Länge einer diff'baren Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{H}^2$:
  $$L_{hyp}(\gamma) := \int_0^1 \frac{\|\gamma'(t)\|^{eukl}}{y(t)}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{y(t)} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}(t)\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}(t)\right)^2}\, dt$$
  $$\gamma(t) = x(t) + i \cdot y(t)$$

Möbiustransformationen (MT)

Eine MT ist eine Abb. von $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ definiert durch:

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

$$\infty \longmapsto \frac{a}{c}, \quad -\frac{d}{c} \longmapsto \infty$$

für feste $a,b,c,d \in \mathbb{C}$.

Man kann zeigen:

1) MT sind 3-fach transitiv, d.h. $\forall\ z_1, z_2, z_3$ und w_1, w_2, w_2 in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ existiert genau eine MT T mit $T(z_i) = w_i$ $i = 1,2,3$.

2) MT bilden Kreise und Geraden auf Kreise und Geraden ab.

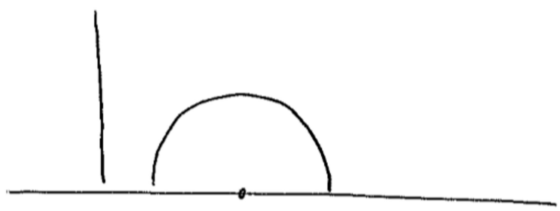
3) $PSL(2,\mathbb{R}) := SL(2,\mathbb{R})/\pm \mathbb{1}$ wirkt auf $\mathbb{H}^2$ durch MTs:

$$\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{g=}, z\Big) \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} =: g.z$$

ist $\operatorname{Im}(z) > 0$ so ist $\operatorname{Im}(g.z) = \dfrac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2} > 0$.

4) Diese Wirkung aus 3) ist isometrisch und $PSL(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow \operatorname{Isom}(\mathbb{H}^2)$ ist injektiv.

5) Geodäten in $\mathbb{H}^2$:



6) $PSL(2,\mathbb{Z})$ wirkt eigentlich diskontin. auf $\mathbb{H}^2$

Einträge a,b,c,d ganzzahlig

mit Fundamentalbereich wie folgt:

Eine lange Bem. zu nicht-Bsp:

Bem. 8.18 nicht-Bsp. für hyperb. Gruppen

Wir hatten gesehen: $\mathbb{Z}^2 \sim_{QI} \mathbb{R}^2$ ← nicht hyperb.

also ist $\mathbb{Z}^2$ nicht hyperb.

wegen der Möglkt Dreiecke immer größer zu skalieren

diese Idee kann → allgemeines für UG $H \leq G$ gefasst werden:

erzeugt $\overset{\text{endlich}}{S_H \subset S_G}$ H bzw G, so gilt

$d_H(1,h) \geq d_G(1,h) \quad \forall h \in H.$

$\uparrow$ Wortmetrik bzgl S_H ↖ bzgl S_G

Gilt auch $\dfrac{d_H(1,h)}{d_G(1,h)} \leq C = \text{konst}$, unabhg von h

(d.h. H ist in G "undistorted"), dann gilt:

ist $H \cong \mathbb{Z}^2$, so ist G nicht hyperbolisch.

Überraschenderweise gilt:

8.19 Satz über die verbotene UG

Sei G endlich erzeugt mit einer UG $H \cong \mathbb{Z}^2$, so ist G nicht hyperbolisch.

⚠ keine Ann, dass H "undistorted" ist, ist hier nötig.

Beweis-Skizze:

1) Zeige, dass ein Element g unendlicher Ordng eine quasi-Achse besitzt, d.h. eine quasi-Geodäte γ existiert s.d. $g^n \cdot \gamma = \gamma \ \forall n$.

2) falls mehrere quasi-Achsen existieren, so sind sie paarweise nah beieinander.

3) sei h von unendl. Ordng und $\langle g,h\rangle \cong \mathbb{Z}^2$. (d.h. g und h kommutieren insbes.)

$\Rightarrow$ h permutiert die quasi-Achsen von g

4) zeige: der Zentralisator von g ist virtuell $\mathbb{Z}$

aber: $\langle g\rangle$ hat in $\mathbb{Z}^2 \cong \langle g,h\rangle$ unendlichen Index und $\langle g\rangle \leq C(g)$ kann nur endlichen Index haben $\lightning$. $\square$

Bem. 8.20

1) (Moussong) Ist G Coxetergruppe und besitzt G keine UG $\cong \mathbb{Z}^2$, so ist G hyperbolisch.

2) Für $\pi_1(M^3)$ M^3 = 3-dim npc mfkt ist $\mathbb{Z}^2$ - UG auch die einzige Obstruktion für Hyperbolizität.

3) i.A. ist es offen, ob UG $\cong \mathbb{Z}^2$ das einzige Hindernis für Hyperbolizität ist.