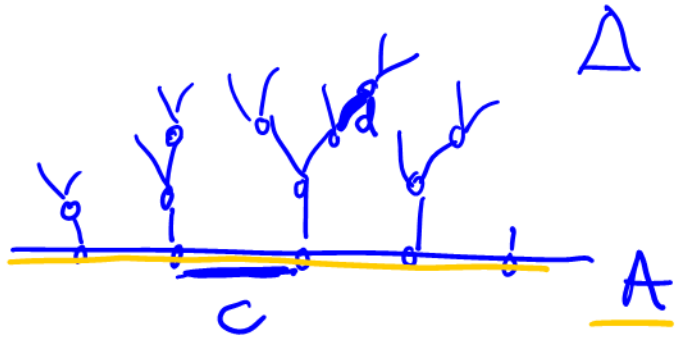
Guten Morgen!

7.32 Prop: Δ Gebäude, dann ist jedes Apartment A in Δ ein Retrakt von Δ.



Beweis: Sei c eine feste Kammer in A.

Betrachte alle Aparts $\mathcal{A}'$ die c enthalten. Für jedes $A' \in \mathcal{A}'$ gibt es dann einen iso $\phi_{A'} : A' \to A$ der u.A. c fixiert. (nach B2)

Sei A'' zweites Apartment das c enthält dann können wir $\phi_{A''} : A'' \to A$ wie folgt konstruieren:

$$\begin{tikzcd} & A' \arrow[dl, bend right, "\phi_{A'}"'] \\ A \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ & A'' \arrow[uu, bend right, "\phi"'] \arrow[ul, dotted] \end{tikzcd}$$

fixiert $A' \cap A''$ pktw.

B2 $\Rightarrow$ $\exists$ iso $\phi : A'' \to A'$

setze $\boxed{\phi_{A''} := \phi_{A'} \circ \phi}$

Die Abb. $\phi_{A''}$ fixiert $A'' \cap A'$ und insbesondere c.

$\phi_{A'}$ und $\phi_{A''}$ stimmen auf $A' \cap A''$ überein

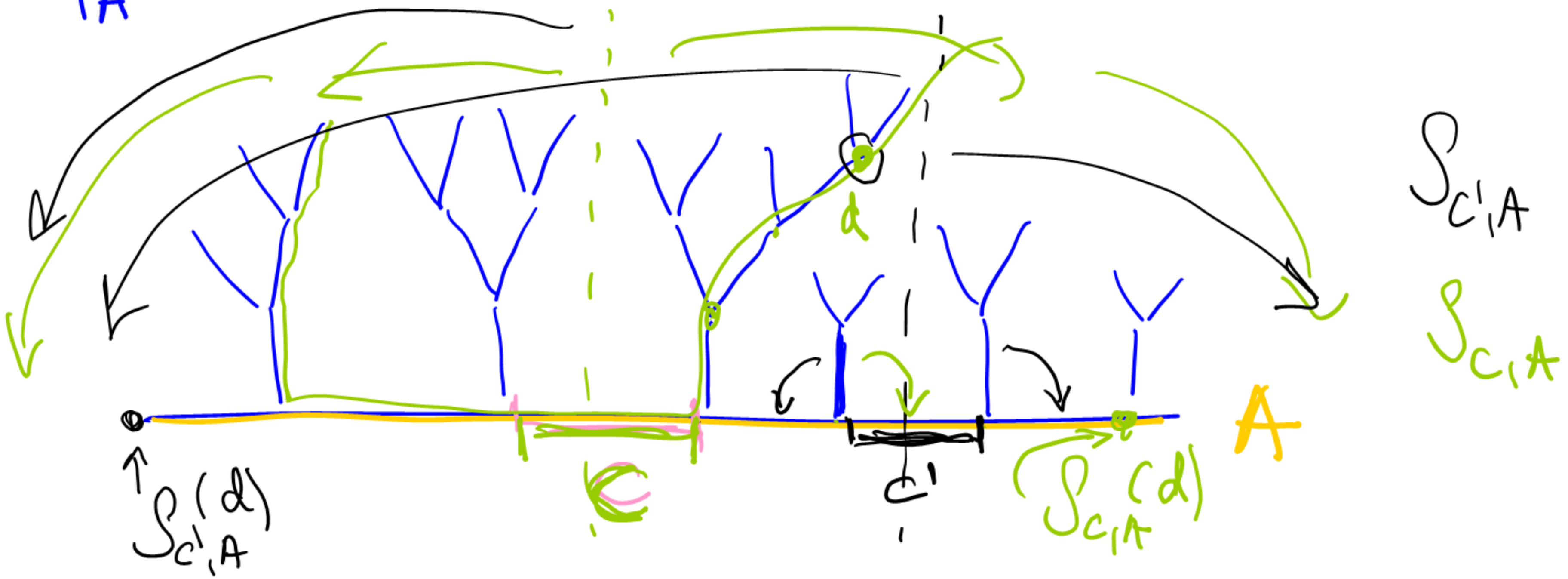
Für bel. $A', A'' \in \mathcal{A}'$ sind also iso $\phi_{A'}, \phi_{A''}$ nach A kompatibel (stimmen auf Schnitten überein).

Das liefert uns eine Abb.

$$\mathcal{S}_{c,A} : \begin{array}{rcl} \Delta & \longrightarrow & A \\ b' & \longmapsto & \phi_{A'}(b') \end{array}$$

wobei b' Simplex in Δ und A' Apt in $\mathcal{A}'$ das b' enthält.

$\mathcal{S}|_A$ ist Identität, denn dann können wir $A' = A$ wählen. $\square$



Bem: Für jedes Paar von Apartment A und Kammer c in A erhalten wir eine <u>Kammernretraktion</u> von Δ auf A bzgl c,

Konstruktion von $\rho_{c,A}$ wie im Beweis der Prop. 7.32.

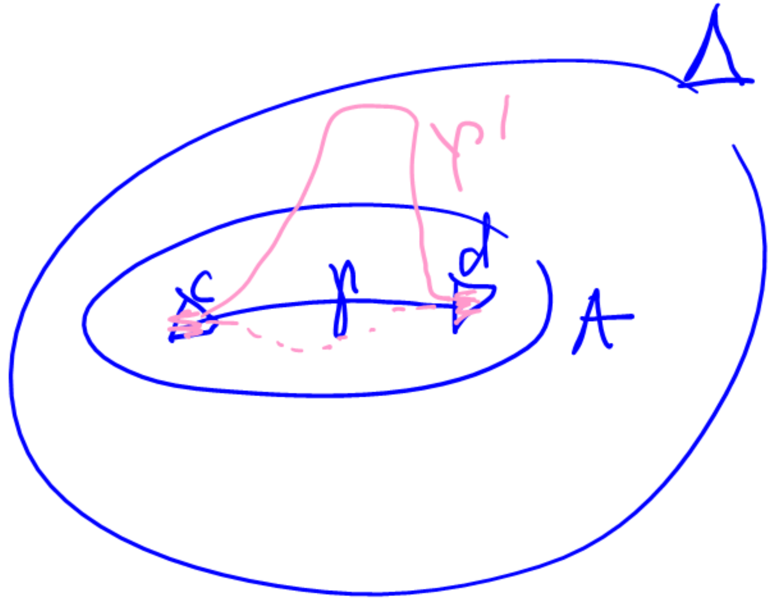
7.33 Prop. Abstände auf Gebäuden

Seien c,d Kammern in einem Gebäude Δ.
Sei A ein Apmt das c und d enthält

$$\underbrace{d_\Delta(c,d)}_{\text{Länge min. Galerie von } c \text{ nach } d \text{ in } \Delta} = \underbrace{d_A(c,d)}_{\text{Länge min Galerie von } c \text{ nach } d \text{ in } A}$$

Insbes. ist $\operatorname{diam}(\Delta) = \operatorname{diam}(A)$ für jedes A in Δ

Beweis: Sei γ min. Galerie von c nach d in A.



Ann. es gibt eine kürzere Galerie γ' von c nach d in Δ.

$\rho_{c,A}(\gamma') \hat{=}$ betrachte gleichzeitig Bild aller Kammern in γ' unter $\rho_{c,A}$

das ist eine Galerie in A weil $\rho_{c,A}$ Kammern auf Kammern abbildet und Nachbarschaft erhält.

Dann ist Länge von $\rho_{c,A}(\gamma')$ genauso lang wie die von γ' und somit der Abstand von c und d höchstens gleich der Länge von γ'. $\lightning$ γ kürzeste

$\Rightarrow d_A(c,d) = d_\Delta(c,d)$ und $\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(\Delta)$.

Um die umgekehrte Abschätzung zu erhalten betrachte c', d' beliebige Kammern in Δ und A' ein bel. Apart, das beide enthält. Dann:

$$d_\Delta(c', d') = d_{A'}(c', d') \leq \operatorname{diam}(A') = \operatorname{diam}(A)$$

und $A' \cong A$ als Cox.cplx und somit $\operatorname{diam}(A') = \operatorname{diam}(A)$

$\Rightarrow$ Beh. $\square$

7.36 Prop. Eigenschaften von $\rho_{c,A} =: \rho$

Sei $\rho_{c,A}$ Retraktion von Δ auf A bzgl c. Dann gilt:

(1) Für jede Seite d von c gilt $\rho_{c,A}^{-1}(d) = \{d\}$

(2) $\rho_{c,A}$ erhält Abstände zu c i.e.

$$d_\Delta(c, \rho_{c,A}(d)) = d_\Delta(c,d) \qquad d \text{ bel. Kammer}$$

(3) $\rho_{c,A}$ ist die eindeutige Kammerabb., die c pktw. fixiert und Abstände zu c erhält.

Beweis: zu (1): Sei e Simplex mit $\rho(e) = d$. Wähle ein Apmt A' das e und c enthält. Dann ist $\rho|_{A'} : A' \longrightarrow A$ iso der (nach Anm) sowohl e als auch d auf d ab. Also muss $e = d$.

zu (2): Sei d Kammer in Δ, wähle Apmt A' das c und d enthält. Dann ist $\rho|_{A'}$ iso auf A

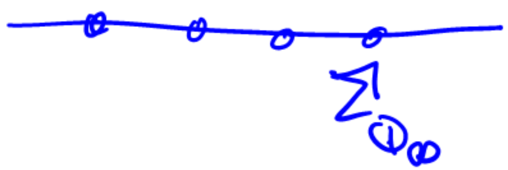
$$d_\Delta(c,d) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Prop. } 7.35}}{=} d_{A'}(c,d) = d_A(\underbrace{\rho(c)}_{=c}, \rho(d)) = d_A(c, \rho(d))$$
$$= d_\Delta(c, \rho(d)) \quad \square$$

zu (3): Ann: Sei $\phi: \Delta \to A$ eine weitere Kammerabb. mit diesen Eigenschaften. Beide, ϕ und ρ, erhalten Abst. und Nachbarschaft und bilden somit minimale Galerien startend in c auf mininimale Galerien in A ab, die auch in c starten. Insbes. wird sowohl durch ϕ als auch durch ρ der Typ einer solchen min. Galerie erhalten
Wegen Eindeutigkeit min. Galerien vom festen Typ in A auch Eindeutigkeit der Abbildungen. $\square$

Bem $\rho_{C,A}$ erhält auch die Färbung λ der codim-1 Seiten
ist also verträglich mit λ.

Prop. 7.37 Jedes Gebäude vom Typ D_∞ ist ein Baum ohne Blätter.

Beweis: Ann Es gibt ein Geb. vom Typ D_∞, das kein Baum ist. Dann gibt es einen k-gon Z in diesem Gebäude Δ.



$3 \le k < \infty$

Sei c Kammer in Z mit v,w Ecken von c und sei A Apart. das c enthält.

Sei $\rho: \Delta \to A$ Retr. von ~~A~~ Δ auf A bzgl c.
Durchlauf Z startend in v, dann w, dann im Kreis

Die so durchlaufenen benachbarten Ecken werden durch ρ auf benachbarten Ecken abgebildet.

- v, w sind fix unter ρ
- $\rho(z)$ "startet und endet" in v
- $\rho(z)$ ist geschl. Kreis
- Urbild von v und w jeweils nur v bzw w enthält (Prop 7.36 (1))

  keine weitere Ecke aus z kann also auf v oder w abgebildet werden

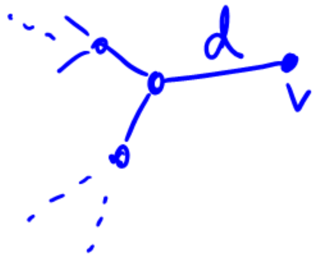
A ist gerade und jede geschlossene Kurve, die mit $v, w, \dots$ startet und zu v zurück kehrt muss nochmal über w gehen

$\lightning$ $\rho^{-1}(w) = \{w\}$

So ein z kann in Δ also nicht existieren.

Δ ist also kreisfrei.

Δ hat auch keine Blätter, denn sei d ein Blatt mit End-Ecke v



die nur in einer Kante enthalten ist.

Dann kann es keinen isometrisch in Δ eingebetteten Unterkomplex isomorph zu D_∞ geben, der d und v enthält.

Weil in D_∞ alle Ecken Grad 2 haben. $\square$

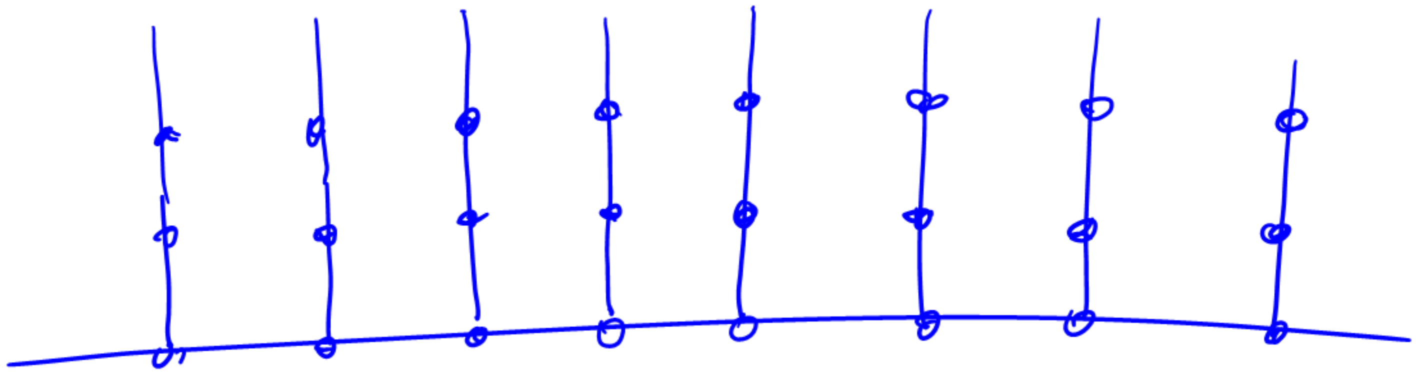
Das vollständige Apartmentsystem

Thm. 7.38
Δ Gebäude. Die Vereinigung aller Apartmentsystem ist wieder ein Apartmentsystem für Δ.

Def. 7.39 Das aus Thm. 7.38 erhaltliche inklusionsmaximale Apartmentsystem nennen wir das vollständige AS.

Prop. 7.40 (o. Bew)
Σ sei Cox. cplx vom Typ (W, S) und Δ sei Gebäude vom Typ (W, S). Dann ist das vollst. Apartmentsystem $\mathcal{A}$ von Δ geg. durch:

$$\mathcal{A} = \{ \text{Teilkplxe } A \text{ in } \Delta \text{ mit } A \cong \Sigma \}.$$



Jede bel. Einbettg von Σ_{D_∞}  ist im vollst. Apartmentsystem enthalten.