# 07 - live notes

Freitag, 12. Mai 2023 08:35

Guten Morgen

es geht gleich los....

# 4 The Tits representation

## 4.1 Definition

A representation of a group $G$ on a $\mathbb{K}$-VS $V$ is a group homomorphism $\rho: G \longrightarrow GL(V)$.
The repr. $\rho$ is faithful if it is injective.

treu

## Thm 4.2

Let $I$ be a finite set, $S = \{s_i\}_{i\in I}$, $M$ Coxeter mx. $= (m_{ij})_{i,j\in I}$

Let $W = \langle S \mid (s_i s_j)^{m_{ij}},\ \forall i,j \in I \rangle$.

Then there is a (faithful) representation

Let $W = \langle S \mid (s_i s_j)^{m_{ij}}, \forall i,j \in I \rangle$.
Then there is a (faithful) representation

$$\rho : W \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$$ mehr dazu später.

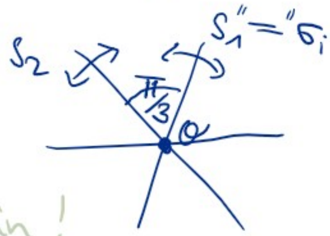
with $n = |S| = |I|$ s.th.

(i) $\forall i \in I$ $\sigma_i := \rho(s_i)$ ist eine lineare Involution mit Fixpktmenge eine Hyperebene in $\mathbb{R}^n$

⚠ $\rho(s_i) = \sigma_i$ muss keine orth. Spiegelung sein!

(ii) $\forall i \neq j$ hat das Produkt $\sigma_i \sigma_j$ Ordnung $m_{ij}$.

$(s_1 s_2)^3 = \mathbb{1}$




## Definition 4.3

Let $(W,S)$ be as in the statement of Thm 4.2.
and suppose $I = \{1, \dots, n\}$, $V \cong \mathbb{R}^n$, $GL(V) = GL(n,\mathbb{R})$.

We define a symmetric bilinear form $\mathcal{B}$ on $V$:

$$\mathcal{B}(e_i, e_j) := \begin{cases} -\cos\left(\frac{\pi}{m_{ij}}\right) & \text{wenn } m_{ij} \text{ endlich} \\ -1 & \text{wenn } m_{ij} = \infty \end{cases}$$

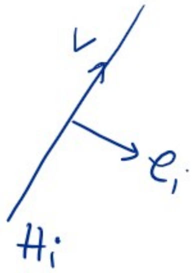
$\cdot\ \mathcal{B}(e_i, e_i) = 1 \qquad \mathcal{B}(e_i, e_j) \leq 0$ wenn $i \neq j$

Define hyperplanes $H_i$ and involutions $\sigma_i$ by putting

$$H_i := \{ v \in V \mid \mathcal{B}(e_i, v) = 0 \}$$

$$\sigma_i : V \to V \ : \ \sigma_i(v) = v - 2\underbrace{\mathcal{B}(e_i, v)}_{}\cdot e_i$$

$e_i - 2e_i \quad = 1$
$v = e_i$
$\sigma_i(e_i) = -e_i$




Then $\sigma_i$ is a linear map with

Then $\sigma_i$ is a linear map with

- $\sigma_i(e_i) = -e_i$
- $\mathrm{Fix}(\sigma_i) = H_i$
- $\sigma_i$ preserves $B$

**Prop. 4.4** Notation as in 4.3

(1) The product $\sigma_i\sigma_j$ has order $m_{ij}$

(2) The map $s_i \overset{f}{\mapsto} \sigma_i$ extends to a homomorphism $W \overset{f}{\to} GL(V)$.

**Proof:** (2) folgt aus (1). Wir haben gesehen, dass $\sigma_i^2 = \mathrm{id}$.

z.z. $(f(s_i)\cdot f(s_j))^{m_{ij}} = \mathbb{1}$ folgt aus (1).

Beweis von (1):

Setze $V_{ij} := \mathrm{span}(e_i, e_j) \subset V$ mit Basis $\{e_i\}_{i\in I}$

Der Raum $V_{ij}$ ist unter $\sigma_i$ und $\sigma_j$ invariant.

$\sigma_i(e_i) = -e_i \in V_{ij}$, ebenso mit $j$ statt $i$

$$\sigma_i(e_j) = e_j - 2\underbrace{B(e_i,e_j)}_{-\cos(\frac{\pi}{m_{ij}})}\cdot e_i = e_j - c\cdot e_i \in V_{ij}$$

ebenso mit vertauschten Rollen

Betrachte $\sigma_i\sigma_j$ eingeschränkt auf $V_{ij}$.

Fall 1: $m_{ij} < \infty$. Setze $v := \lambda_i e_i + \lambda_j e_j \in V_{ij}$, $v \neq 0$.

$$B(v,v) = \lambda_i^2 - 2\lambda_i\lambda_j\cos\left(\frac{\pi}{m_{ij}}\right) + \lambda_j^2$$

$$= \underbrace{\left(\lambda_i - \lambda_j\cos\left(\frac{\pi}{m_{ij}}\right)\right)^2}_{} + \underbrace{\lambda_j^2\left(\sin\left(\frac{\pi}{m_{ij}}\right)\right)^2}_{} > 0.$$

$B$ pos. definit auf $V_{ij}$.

Wir können daher $V_{ij}$ mit $B|_{V_{ij}}$ identifizieren

Wir können daher $V_{ij}$ mit $B|_{V_{ij}}$ identifizieren mit $\mathbb{R}^2$ und std Skalarprod.

Dann sind die Einschränkungen $\sigma_i|_{V_{ij}}$ und $\sigma_j|_{V_{ij}}$ orth. Spiegelungen an $H_i \cap V_{ij}$ und $H_j \cap V_{ij}$.

$H_i' := H_i \cap V_{ij}$ ist senkrecht zu $e_i$

$H_j' := H_j \cap V_{ij}$ — " — $e_j$.

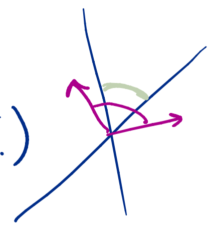
$H_i', H_j'$ sind Hyperebenen, also Geraden, in $V_{ij} \cong \mathbb{R}^2$.

Was ist der Winkel zwischen $H_i'$ und $H_j'$?

Berechne $B(e_i, e_j) = -\cos\left(\frac{\pi}{m_{ij}}\right) = \cos\left(\underbrace{\pi - \frac{\pi}{m_{ij}}}\right)$

$m_{ij} < \infty$

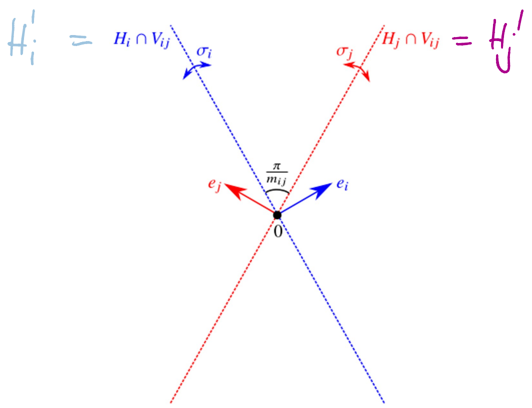
Also ist Winkel zwischen $e_i, e_j$ ist $\pi - \frac{\pi}{m_{ij}}$



Also ist Winkel zwischen $H_i'$ und $H_j'$ ist $\pi - \left(\pi - \frac{\pi}{m_{ij}}\right) = \frac{\pi}{m_{ij}}$.

Das Produkt $\sigma_i \sigma_j|_{V_{ij}}$ ist also eine Rotation um $0$ = Schnittpkt der Spiegelgeraden von $\sigma_i|_{V_{ij}}, \sigma_j|_{V_{ij}}$

die Rotation hat Ordnung $m_{ij}$.



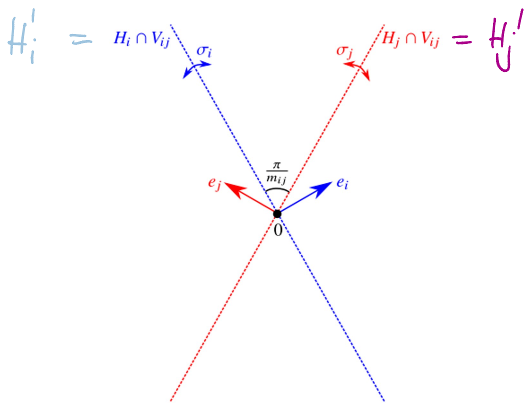



Figure 3.1. Orthogonal reflections obtained by restricting $\sigma_i$ and $\sigma_j$ to $V_{ij} = \operatorname{span}(e_i, e_j) \cong \mathbb{R}^2$, when $m_{ij}$ is finite.

Wir müssen schauen was auf $V_{ij}^\perp$ passiert.

$$V_{ij}^\perp = \{ v' \in V \mid B(v',v) = 0 \ \forall v \in V_{ij} \}$$

$B$ pos. definit auf $V_{ij}$ $\Rightarrow$ $V_{ij} \oplus V_{ij}^\perp = V$.

Beh: $\sigma_i$ fixiert $V_{ij}^\perp$ punktweise.

Bew. Sei $v \in V_{ij}^\perp$, dann ist $\sigma_i(v) \overset{\text{Def.}}{=} v - 2\underbrace{B(e_i,v)}_{=0}\cdot e_i = v$ □

Ebenso für $\sigma_j$

Also ist auch die Ordnung von $\sigma_i\sigma_j$ auf $V$ gleich $m_{ij}$. $\Rightarrow$ (1) im Fall $m_{ij} < \infty$.

$B(v,v) = \lambda_i^2 \underbrace{B(e_i,e_i)}_{=1} + \lambda_i\lambda_j \underbrace{B(e_i,e_j)}_{=-1}$

2. Fall $m_{ij} = \infty$:

Setze wieder $v = \lambda_i e_i + \lambda_j e_j \in V_{ij}$ dann gilt:

$$B(v,v) = \boxed{\lambda_i^2 - 2\lambda_i\lambda_j + \lambda_j^2}$$
$$= (\lambda_i - \lambda_j)^2 \geq 0 \quad \text{mit „}=0\text{"}$$

genau dann, wenn $\lambda_i = \lambda_j$.

Also ist $B$ positiv semidefinit auf $V_{ij}$.

Man kann ausrechnen:

$$\sigma_i\sigma_j(e_i) = e_i + 2(e_i + e_j)$$

$$(\sigma_i\sigma_j)^k(e_i) = e_i + 2k(e_i + e_j) \neq e_i \quad \forall k$$

$$(\sigma_i\sigma_j)^k(e_i) = e_i + 2k(e_i+e_j) \neq e_i \quad \forall k$$

$\Rightarrow \sigma_i\sigma_j$ unendl. Ordnung auf $V_{ij}$.
Mit ähnlichen Argumenten wie im 1. Fall auch auf ganz $V$. $\square$

<u>Corollary 4.5</u> Notation as in 4.3
In a Coxeter system $(W,S)$ the generators $s \in S$ are pairwise distinct involutions of $W$.

<u>Proof</u> Each $\sigma_i$ is an involution by construction. Since the order of $\sigma_i\sigma_j$ is $m_{ij}$ we obtain that $\sigma_i$ and $\sigma_j$ are distinct for $i \neq j$.
As $\rho$ is a representation also $s_i$ and $s_j$ must be distinct. $\square$

**Cor. 4.6**

$(W,S)$ Coxeter system with Coxeter mx $M=(m_{ij})_{ij}$.
Then the product $s_is_j$ has order $m_{ij}$.

**Proof** if $m_{ij}<\infty$: then $(s_is_j)^{m_{ij}}=\mathbb{1}$ means $s_is_j$ has order at most $m_{ij}$.
Since the image $\rho(s_is_j)=\rho(s_i)\rho(s_j)=\sigma_i\sigma_j$ has order $m_{ij}$ in $\rho(W)\leq GL(n,\mathbb{R})$ the same must be true for $s_is_j$.

$m_{ij}=\infty$: then $\rho(s_is_j)$ has infinite order and so has $s_is_j$. $\square$

## 4.7 The geometry behind case 2 in the proof above:

a long example for $W=D_\infty$.

$D_\infty=\langle s_i,s_j \mid s_i^2, s_j^2, \cancel{(s_is_j)^\infty}\rangle$

Continue notation from above.

$m_{ij}=\infty$




$m_{ij}=\infty$

$n=|I|=2$

Define $A:=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$.
This matrix describes $B|_{V_{ij}}$ with respect to the basis $e_i,e_j$ of $V_{ij}=\operatorname{span}(e_i,e_j)\subset V$.

basis $e_i, e_j$ of $V_{ij} = \operatorname{span}(e_i, e_j) \subset V$.

We have:

$$\operatorname{null}(A) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \operatorname{span}(e_i + e_j)$$

1-dim

$$L := \{ v \in V_{ij} \mid B(v,v) = 0 \}.$$

$\Rightarrow$ $B$ induziert eine pos. definite Form auf dem Quotienten $\underbrace{V_{ij}/\operatorname{null}(A)}$.

identifiziere mit einem eukl. VR der Dimension $\dim V_{ij} - 1$.

Put $W_{ij} := \langle s_i, s_j \rangle \leq W$. As $s_i s_j$ has order $\infty$ we have $W_{ij} \cong D_\infty$. this is a Euclidean reflection group

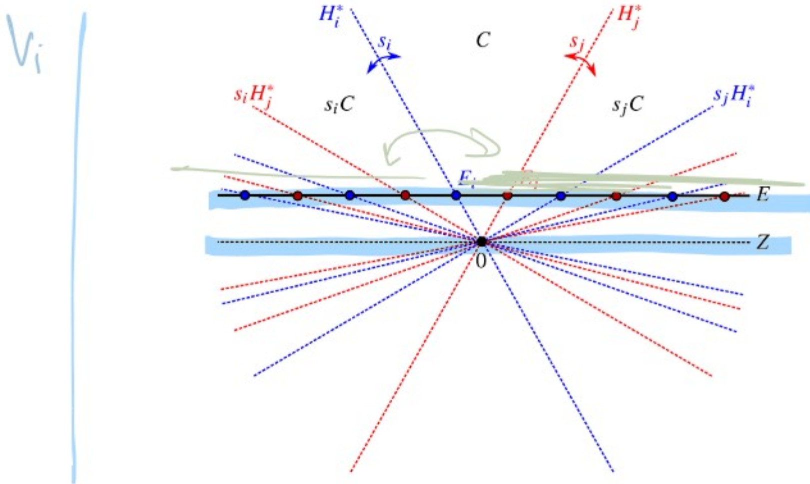




Figure 3.2. The dual space $V_{ij}^*$ in the case $m_{ij} = \infty$, with its linear subspaces $Z$, $H_i^*$ and $H_j^*$, and its affine subspace $E = Z + 1$. The group $W_{ij} = \langle s_i, s_j \rangle \cong D_\infty$ acts on the Euclidean space $E$ as a geometric reflection group, generated by reflections in the codimension-1 subspaces $E_i$ and $E_j$ of $E$. The chamber $C$ and some of its images are labelled. Compare with Figure 1.2.

Observe:

- $W_{ij} = \langle s_i, s_j \rangle < W$ wirkt auf $V_{ij}$ i.e. $\rho(W_{ij})$ ist eine Gruppe linearer Abb. von $V_{ij}$
- (ÜA) Die Darstellung $\rho|_{W_{ij}}$ ist treu auf $V_{ij}$
- $\rho(W_{ij})$ fixiert null(A) punktweise
  weil $s_i(e_i + e_j) = s_j(e_i + e_j) = e_i + e_j$.

Consider the dual VS

$$V_{ij}^* = \{\text{linear functionals } \varphi : V_{ij} \to \mathbb{R}\}.$$

The group $W_{ij}$ acts on $V_{ij}^*$ via

$$(w \cdot \varphi)(v) := \varphi(\underbrace{w^{-1} \cdot v}_{\text{short for } (\rho(w^{-1}))(v)}) = \varphi((\rho(w^{-1})(v)))$$

$$(w\cdot\varphi)(v) := \varphi(\underbrace{w^{-1}\cdot v}_{\text{short for } (\underbrace{\rho(w^{-1})}_{\in GL(V)})(v)}) = \varphi(\rho(w^{-1})(v))$$

where $w \in W_{ij}$, $\varphi \in V_{ij}^*$, $v \in V_{ij}$.

This action is faithful as $\rho$ is faithful.

$\Rightarrow$ $W_{ij} \cong D_\infty \curvearrowright V_{ij}^*$ faithfully.

Consider the codim 1 linear subspace $Z$ of $V_{ij}^*$

$$Z := \{\varphi \in V_{ij}^* \mid \varphi(e_i + e_j) = 0\}.$$

The group $\rho(W_{ij})$ fixes $e_i + e_j$ and hence preserves $Z$.

We may identify $\boxed{Z \text{ with } V_{ij}/\mathrm{null}(A)}$.

$\Rightarrow$ $Z$ has a Euclidean structure (of $\dim(V_{ij}^*) - 1$).

Define an affine subspace $E$ of $V_{ij}^*$ as follows:

$$E = \{\varphi \in V_{ij}^* \mid \varphi(e_i + e_j) = 1\}.$$

Translation of $Z$

Then $E$ also has a Euclidean structure (of dimension $\dim(V_{ij}^*) - 1$).

Observe that $W_{ij}$ fixes $e_i + e_j$ and hence stabilizes $E$.

As a subset of $V_{ij}^*$ the space $E$ spans $V_{ij}^*$.

And $W_{ij}$ acts faithfully on $V_{ij}^*$.

Hence the action on $E$ is faithful.

And $W_{ij}$ acts faithfully on $V_{ij}$.
Hence the action on $E$ is faithful.

Consider the codim 1 linear subspace $H_i$ of $V_{ij}^*$:

$$H_i^* := \{ \varphi \in V_{ij}^* \mid \varphi(e_i) = 0 \}.$$

$H_i^* \neq Z \Rightarrow E_i := E \cap H_i^*$ is a codim 1 hyperpl. of $E$ i.e. a point

We have:

- $s_i e_i = -e_i$, $s_i^2 = id$

$\Rightarrow$ $s_i$ acts as a reflection along $E_i$.

Same goes through for $s_j$ and $E_j \neq E_i$.

$\Rightarrow$ $W_{ij}$ isometrically acts on $E$
and is generated by reflections
along two endpoints $E_i, E_j$ of an interval.

This is exactly the presentation as a Euclidean reflection group!