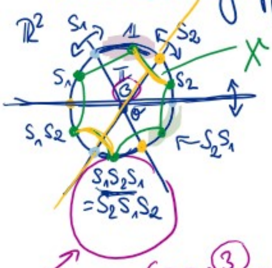
Wdh. Coxetergruppen „=" abstrakte Versionen von Spiegelungsgruppen



Relation $(s_1 s_2)^{3} = 1$

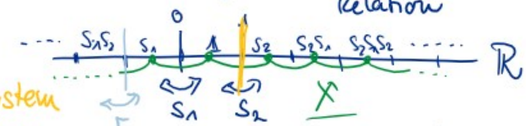
(W,S) ist ein Coxetersystem wenn

W Gruppe, $S \subset W$ und $S = \{s_i \mid i \in I\}$

$|I| = n$

$W = < S \mid s_i^2,\ (s_i s_j)^{m_{ij}} >$, $i \neq j$

$m_{ij} \in \mathbb{N}_{\geq 2} \cup \{\infty\}$ $m_{ij} = \infty$ wo keine Relation



$R = \{ s_1, s_2, s_1 s_2 s_1 \}$

← (X,R) ist ein Prä-Spiegelsystem

"$g s_i g^{-1}$"

$R := \{ g s_i g^{-1} \mid i = 1,2$ und $g \in G \}$

$G := < s_1, s_2 >$

Def 3.12 Prä-Spiegelsystem für eine Gruppe G

Ein Prä-Spiegelsystem für eine Gruppe G ist ein Paar (X,R) wobei gilt:

X ist ein Graph auf dem G wirkt durch Graph-Automorphismen und X ist einfach und zusammenhängend

R ist Teilmenge von G s.d. gilt:

(1) $\forall r \in R$ ist $r^2 = 1$

(2) R ist abgeschlossen unter Konjugation d.h. $\forall g \in G, \forall r \in R$ gilt: $g r g^{-1} \in R$

(3) R erzeugt G

(4) $\forall$ Kanten e in X existiert eine „Spiegelung" $r_e \in R$ s.d. r_e die Endpunkte von e vertauscht

(5) $\forall r \in R$ gibt es mindestens eine Kante e in X s.d. e durch r geflippt wird.
d.h. Endpkte werden vertauscht

3.13 Example (W,S) Coxeter system

Put $X := Cay(W,S)$

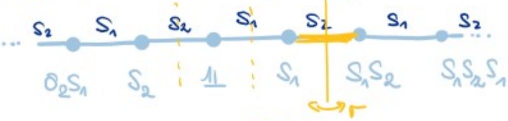
put $\boxed{R := WSW^{-1} := \{ g s g^{-1} \mid g \in W, s \in S \}}$.

Then (X,R) is a pre-reflection system in all cases 1)–3) of Example 3.8.

(abstrakte) Spiegelungen der Coxetergruppe

1) $D_\infty = < s_1, s_2 \mid s_i^2 >$ $S := \{ s_1, s_2 \}$

$Cay(D_\infty, S)$
$\shortparallel$
W



s_1^{-1}
$\shortparallel$
$r := s_1 \cdot s_2 \cdot s_1 \in R$

W

$$s_1^{-1} = s_1$$

$$r := s_1 \cdot s_2 \cdot s_1 \in R$$

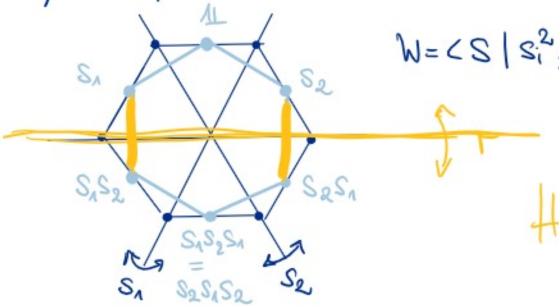
$$r \cdot s_1 = s_1 s_2 \cancel{s_1} \cancel{s_1} = s_1 s_2 = v_2$$

$$r \cdot v_2 = s_1 \cancel{s_2} \cancel{s_1} \cdot \cancel{s_1} \cancel{s_2} = s_1 = v_1$$

i.A. $\{g, gs\}$ Kante im $Cay(W, S)$

$R \ni g \cdot s g^{-1}$ vertauscht die Enden g, gs

2) $W = Sym(3)$, $S = \{s_1, s_2\}$ as shown



$$W = \langle S \mid s_i^2, s_1 s_2^3 \rangle = D_6$$

$H_r = \{$ gelben Kanten $\}$

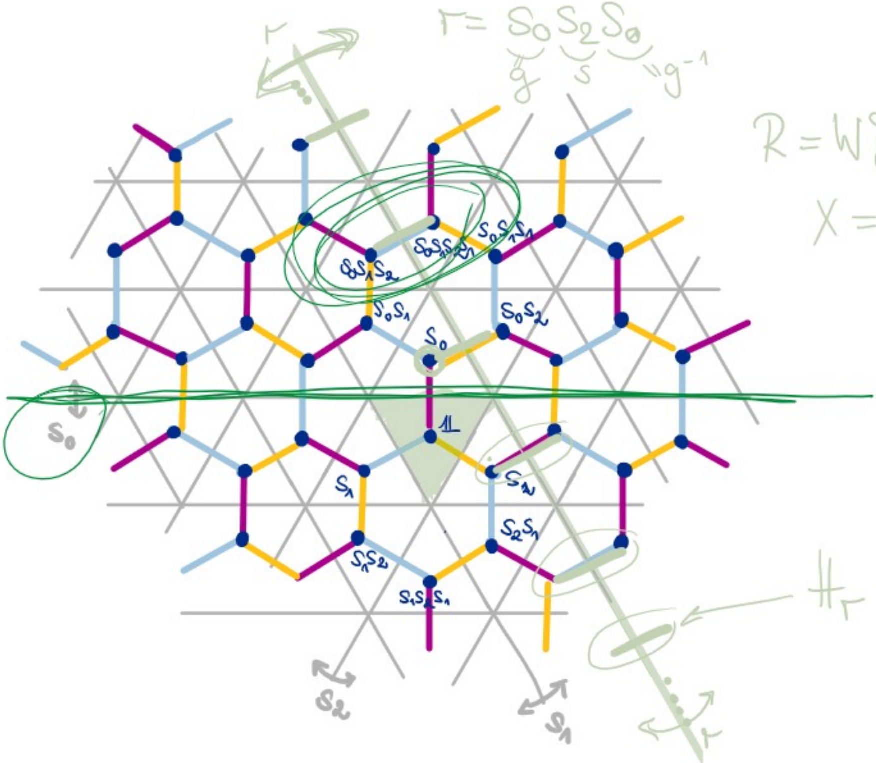
3) $W = \langle s_0, s_1, s_2 \mid s_i^2, (s_i s_j)^3 \; i \neq j \rangle$

The Cayley graph is the dual graph of the tiling corresponding to W:

$Cay(W, S)$, $S = \{s_0, s_1, s_2\}$

$R = WSW^{-1}$, $X = Cay(W, S)$

$r \in R$ flippt unendlich viele Kanten!



$R = W\{s_0, s_1, s_2\}W^{-1}$

$X = \mathrm{Cay}(W, \{s_0, s_1, s_2\})$

$H_r = \{$hell-grünen Kanten$\}$

4) A non-Coxeter example:

take $G = \mathbb{Z}$ and $S = \{\pm 1\}$ ← no involutions

$\mathrm{Cay}(G,S) =$ 

Q: Is there a pre-reflection system for this example?

5) Lemma: (W,S) any Coxeter system, put $X := \mathrm{Cay}(W,S)$ and $R := WSW^{-1}$, then (X,R) is a pre-reflection system.

Beweis: $\mathrm{Cay}(W,S)$ ist ein zshgd, einfacher Graph.

Und gsg^{-1} flipped die Kante $\{g, gs\}$.

für beliebiges $g \in G = W$ und $s \in R$.

Weil $R = WSW^{-1}$ gibt es nur solche r

d.h. $r = gsg^{-1}$. □

Def 3.14 Wände und Spiegelsysteme

Sei (X,R) ein Prä-Spiegelsystem für eine Gruppe G.
Eine <u>Wand</u> H_r für $r \in R$ ist die Menge von (Mittelpunkten von) Kanten in X, die von r geflippt werden.

(X,R) ist ein <u>Spiegelsystem</u>, wenn zusätzlich gilt:

(6) $\forall r \in R$ hat $X \setminus H_r$ genau zwei Zusammenhangskomponenten.

Graph X wobei Kanten in H_r gelöscht werden

<u>Rmk</u> Note that each $r \in R$ in a reflection system flips the two components of $X \setminus H_r$.
We will prove that all pre-reflection systems for Coxeter grps defined as in Example 3.11 are in fact reflection systems.

Def 3.15 <u>deletion & exchange condition</u>

Sei W eine Gruppe erzeugt von einer Menge S von Involutionen, d.h. $\forall s \in S$ gilt $s^2 = \mathbb{1}$.

W erfüllt die <u>deletion condition</u> / <u>Löschbedingung</u> wenn für alle Wörter $(s_1, \dots, s_k)$ in S mit $\ell(s_1 \cdots s_k) < k$ Indizes $i \neq j$ existieren s.d.

$$s_1 \cdots s_k = s_1 \cdots \hat{s}_i \cdots \hat{s}_j \cdots s_k .$$

diese Buchstaben werden gelöscht

Bsp. $W = \langle s_1, s_2 \mid s_i^2, (s_1 s_2)^3 \rangle$

Wort in S $\rightarrow (s_1, s_1, s_1, s_2)$, $\ell(\overbrace{s_1 s_1 s_1 s_2}^{\in W}) = 2$

$s_1 s_2 = \hat{s}_1 \cdot \hat{s}_1 \cdot s_1 \cdot s_2 = s_1 s_1 s_1 s_2$

Element wurde gelöscht

W erfüllt die <u>exchange condition</u> / <u>Austauschbedingung</u>, wenn gilt:
Ist $(s_1, \dots, s_k)$ ein reduziertes Wort für w, dann gilt $\forall s \in S$ entweder $\ell(sw) = k+1$ oder es gibt einen Index i s.d. $w = s\, \overbrace{s_1 \cdots \hat{s}_i \cdots s_k}$.

$w = \underbrace{s_2 \cdot s_1 s_2}\hat{s}_1 \quad i = 3$

- (s_1, s_2) red. Wort für $s_1 s_2$ (Länge 2)
  $s = s_2$, dann $s_2 s_1 s_2$ hat Länge 3 und (s_2, s_1, s_2) red. Wort
- $\overbrace{(s_1, s_2, s_1)}^{w}$ red. Wort $s = s_2$
  $s = \boxed{s_2}\boxed{s_1 \cdot s_2 \cdot s_1} = \cancel{s_2} \cdot \cancel{s_2} s_1 s_2 = s_1 s_2$

$s_2 \quad \mathbb{1} \quad s_1$

$s_2 s_1 \quad s_1 s_2$

$w = \underline{s_2 \cdot s_1 s_2} \hat{s}_1 \quad i=3$

- (s_1, s_2, s_1) red. Wort $\quad s = s_2$

$s = \boxed{s_2 \, s_1 \cdot s_2 \cdot s_1} = \cancel{s_2} \cdot \cancel{s_2} s_1 s_2 = s_1 s_2$

Element hat Länge 2

Thm 3.16

Sei W erzeugt von einer Menge S von Involutionen.
Setze $X := Cay(W, S)$ und $R := WSW^{-1}$.
Dann sind äquivalent:

(1) (W,S) ist eine Coxetergruppe
(2) (X,R) ein Spiegelsystem
(3) (W,S) erfüllt die Löschbedingung
(4) (W,S) erfüllt die Austauschbedingung

<u>WdH</u> $Cay(W,S)$ Ecken $\hat{=}$ W
gefärbte Kanten $\{g, gs\}$ mit $g \in W$, $s \in S$
der Farbe s

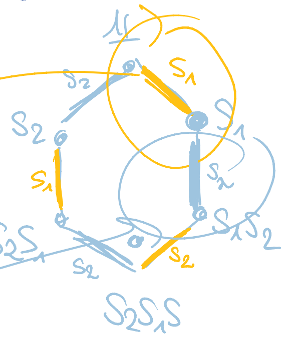
3.17 Words and paths in $X = Cay(W,S)$

Suppose W is generated by involutions S.
Suppose further that all involutions in S are distinct. Then we have a bijection:

$$\left\{ \begin{matrix}\text{minimal/reduziert} \\ \text{words in } S\end{matrix} \right\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{ \begin{matrix}\text{minimal / nicht stotternd} \\ \text{edge paths in } X \\ \text{starting at } 1\end{matrix} \right\}$$

$(s_1, s_2, \dots s_k) \longmapsto$ path with vertices
$1, s_1, s_1 s_2, s_1 s_2 s_3, \dots$
$\dots, s_1 s_2 \cdots s_k$

$\{1, s_1\}$ $\quad \{s_1, s_1 s_2\}$



Wort in

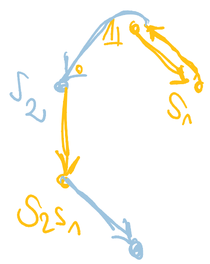
$s_1 s_1 s_2 s_1 s_1$

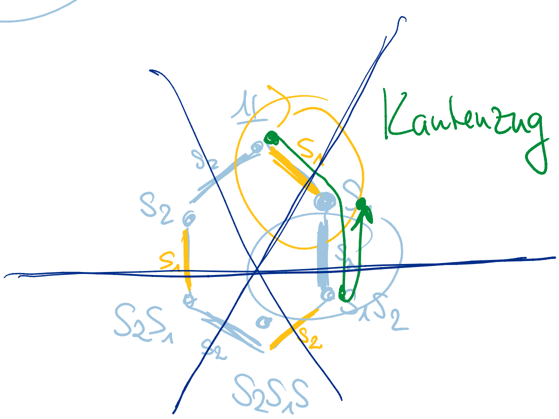
$\{s_1 s_1 s_2, s_1 s_1 s_2 s_1\}$ $\quad$ $\overset{\shortparallel}{s_2}$, $\overset{\shortparallel}{s_2 s_1}$

$\{s_2 s_1, s_2 s_1 s_2\}$

$\{1, s_1\}$ $\quad \{s_1, \overset{1}{s_1 s_1}\}$ $\quad \{s_1 s_1, s_1 s_1 s_2\}$ $\quad 1 \quad s_2$

$S = \{s_1, s_2\}$





Kantenzug: lese der Reihe nach die durchlaufenen Farben

d.h. $(s_1 s_2 s_2) =$ Wort

$\updownarrow$

$\{1, s_1\}, \{s_1, s_1 s_2\} \quad \{s_1 s_2, \overbrace{s_1 s_2 s_2}^{= s_1}\}$

Kantenzug endet immer im Element gegeben durch

3.18 Wörter, Spiegelungen und überschrittene Wände

Assumptions as in 3.17.

3.18 Wörter, Spiegelungen und überschrittene Wände

Assumptions as in 3.17.

Kantenzug endet immer im Element gegeben durch das Produkt des Wortes

zB $s_1 \cdot s_2 \cdot s_2 = s_1$

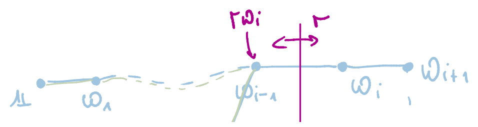
key to prove (1) ⇒ (2) and (2) ⇒ (3).

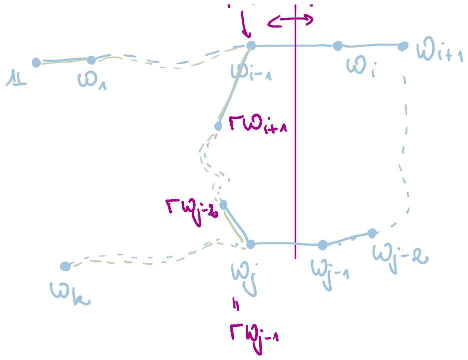
Lemma 3.19

W erzeugt von Involutionen S.
Sei $X = \mathrm{Cay}(W,S)$, $R = WSW^{-1}$.
Sei $(s_1, \dots, s_k)$ ein Wort in S.
Sei $r_1, \dots, r_k$ die Menge der zugehörigen Spiegelungen.
Wenn $r_i = r_j$ für ein $i<j$, dann gilt:

$$s_1 \cdots s_k = s_1 \cdots \hat{s}_i \cdots \hat{s}_j \cdots s_k .$$

Beweis:





1
ω1
ωi-1
ωi
ωi+1
Γωi+1
Γωj-2
ωj
ωj-1
ωj-2
ωk
Γωj-1