03 - live notes- Cayley graphs and word length

Donnerstag, 4. April 2024 16:21

Guten Morgen!

Es geht gleich los.

§3 A combinatorial characterization of Coxeter grps

Goal: the exchange and deletion property.

Austausch- und Löschbedingung

3.1 Notation / standing assumptions

abgeschlossen unter Invertieren

G is a group with generating set $S \subset G$

Assume $\boxed{S = S^{-1}} := \{s^{-1} \mid s \in S\}$ for simplicity.

in a Coxeter system this is automatically the case.

We will distinguish words in S, i.e. lists of generators $(s_1, \dots, s_n)$ and group elements $s_1 \cdot \ldots \cdot s_n \in G$, where $s_i \in S$ $\forall i$.

generators $(s_1, \dots, s_n)$ and group elements
$s_1 \cdot \ldots \cdot s_n \in G$, where $s_i \in S \ \forall i$.

Jedes Wort in S liefert ein eindeutiges $g \in G$
aber nicht umgekehrt (i.A.)

Def 3.2 Word length Wortlänge
With G, S as above

Die Wortlänge eines Wortes $(s_1, \dots, s_n)$ in S
(bezüglich S) als n

Wortlänge eines Elementes $g \in G$ bezüglich S
ist definiert als

$$l_S(g) := \min \{ n \in \mathbb{N} \mid \exists (s_1, \dots, s_n),\ s_i \in S \text{ s.th. } g = s_1 \cdots s_n \}$$

Ist $l_S(g) = n$ für $g \in G$ und $g = s_1 \cdots s_n$
dann heißt das zugehörige Wort reduziert
bzw. einen reduzierten Ausdruck für g.

Wir definieren die Wortmetrik bzgl S auf G wie folgt:

$$d_S(g, h) := l_S(g^{-1} h).$$

$\llcorner$

3.3 Universality property

$\langle S \mid s_i^2, (s_i s_j)^{m_{ij}} \rangle$

Let (W, S) be a Coxeter system.
If G is a group and $f: S \to G$ is a map
s.th. $\left(f(s_1) \cdot f(s_2) \right)^{m(s_1, s_2)} = \mathbb{1} \quad \forall s_1, s_2 \in S$

s.th. $(f(s_1)\cdot f(s_2)) \quad = 1 \quad \forall s_1, s_2 \in S$

then $\exists!$ extension of f to a group homomorphism $f: W \to G$.

3.4 Lemma

Let (W,S) be a Coxeter system and consider the map $\varepsilon: s \mapsto -1 \quad \forall s \in S$.
Then ε extends uniquely to a group homomorphism $\varepsilon: W \to \{+1,-1\}$. ← seen as a multiplicative grp.

Bem: Äquivalent dazu $\exists!$ epim. $\varepsilon: W \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0,1\}$

$\varepsilon(s_i) = 1$ ↑ als additive Gruppe

Proof: Wir wollen Universalitätsbedingung anwenden, d.h. wir müssen prüfen, dass für Paare s_i, s_j aus S gilt: $(\varepsilon(s_i)\cdot\varepsilon(s_j))^{m_{ij}} = 1$.

$\forall ij: \quad \varepsilon(s_i)\cdot\varepsilon(s_j) = (-1)\cdot(-1) = 1 \quad , \quad 1^{m_{ij}} = 1 \quad \forall m_{ij}$

□

Cor:

Rmk: Equivalently there is an epimorphism (which we also call ε):

$$\varepsilon: W \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad \leftarrow \text{as an additive group}$$

Cor 3.5

Each $s \in S$ is an involution.

3.6 Properties of l_S

(W,S) a Coxeter system, $l := l_S$ the S-length
Then for all $w \in W$ we have:

(i) $\varepsilon(w) = (-1)^{l(w)}$

(ii) $l(uw) = l(u) + l(w) \mod 2$ $u = s_1 \cdots s_n$ $l(u)=n$ $w = s_{n+1} \cdots s_{n+k}$ $l(w)=k$

(iii) $l(sw) = l(w) \pm 1 \quad \forall s \in S$ $u \cdot w = s_1 \cdots \cancel{s_n} \cancel{s_{n+1}} \cdots s_{n+k}$ $\overset{?}{=}$

(iv) $l(w^{-1}) = l(w)$

(v) $|l(u) - l(w)| \leq l(uw) \leq l(u) + l(w)$

(vi) $l(uw^{-1}) =: d_S(u,w)$ ist tatsächlich eine Metrik auf W.

ÜA: Check that the left-action of G on itself is isometric wrt this metric.

This length function is indeed a metric of a geometric object, which we now introduce:

Def 3.7 The Cayley graph $Cay(G,S)$ of a group G (beliebige Gruppe) bzgl einem endl. Erz.system S

Ecken sind G

Involutionen

Ecken sind G

Kanten: $\{\{g, gs\} \mid g \in G, s \in S, s^2 = \mathbb{1}\}$

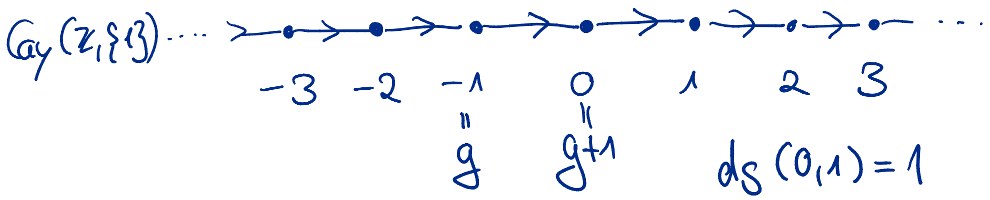
Involutionen ⇝ ungerichtete Kanten

$\cup \{(g, gs) \mid g \in G, s \in S, s^2 \neq \mathbb{1}\}$

nicht-Involution ⇝ gerichtete Kanten

bzgl. "+"

Bsp. $\mathbb{Z}, S = \{1\}$ $\quad 1+1 = 2 \neq 0 = \mathbb{1}$



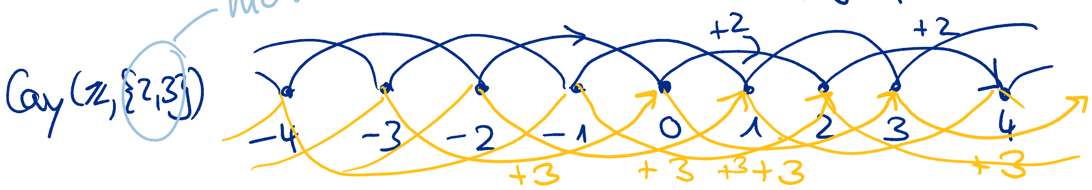
$d_S(0,1) = 1$

$\mathbb{Z}, S = \{2,3\}$

Wort ≙ $3-2$

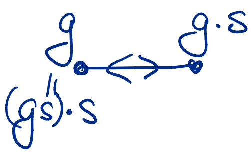
$d_S(0,1) = 2$

nicht Involutionen



gefärbte Kanten mit Farbe $s \in S$

Rmk If s is an involution, i.e. $s^2 = \mathbb{1}$, then gsg^{-1} swaps g and gs and is the unique isomorphism of $Cay(G,S)$ which flips this edge.



(g, gs)

$(gs, gss = g)$

3.8 Examples

Involutionen!!

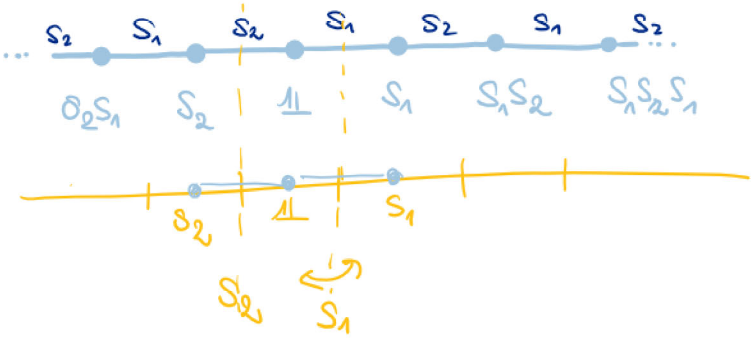
3.8 Examples

Involution... $(gs^{-1})\cdot s$ $(gs, gss=g)$

1) $D_\infty = \langle s_1, s_2 \mid s_i^2 \rangle$ $S := \{s_1, s_2\}$

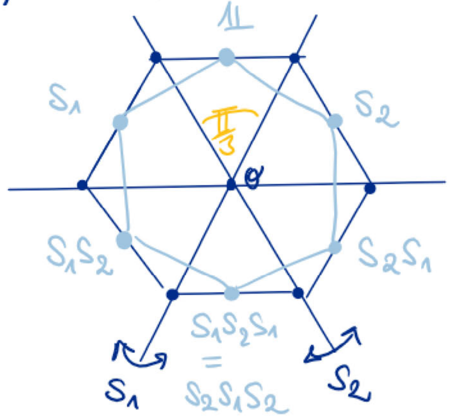
$\mathrm{Cay}(D_\infty, S)$

ist der duale Graph der Parkettierung von $\mathbb{R}$ bzgl. D_∞



Intervall ≙ Ecke

2) $W = \mathrm{Sym}(3)$, $S = \{s_1, s_2\}$ as shown



$W = \langle S \mid s_i^2, s_1s_2^{3} \rangle = D_6$

6 Elemente

$\mathbb{1}, s_1, s_2,$

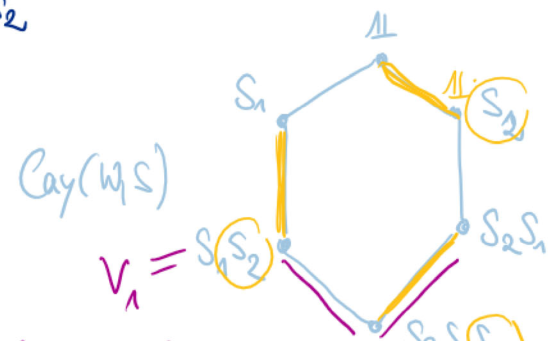
s_1s_2, s_2s_1

$s_1s_2s_1 = s_2s_1s_2$

$(s_1s_2)^3 = \mathbb{1}$

$\Leftrightarrow s_1s_2s_1s_2s_1s_2 = \mathbb{1}$

$\Leftrightarrow s_1s_2s_1 = s_2s_1s_2$



$\{\mathbb{1}, \mathbb{1}\cdot s_i\}\ \forall i = 1,2$

$\{s_2, s_2\cdot s_2 = \mathbb{1}\}$

$\{s_2, s_2s_1\}$

$d(v_1, v_2) = 2$

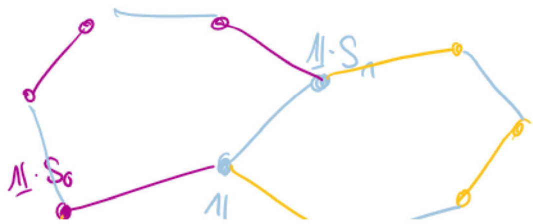
$= l_S(v_2^{-1}\cdot v_1) = l_S(s_1\cdot s_2 \cdot s_1 \cdot s_2) \overset{\text{Relationen}}{=} l_S(s_2s_1\cancel{s_2}\cdot \cancel{s_2}) = l_S(s_2s_1) = 2$

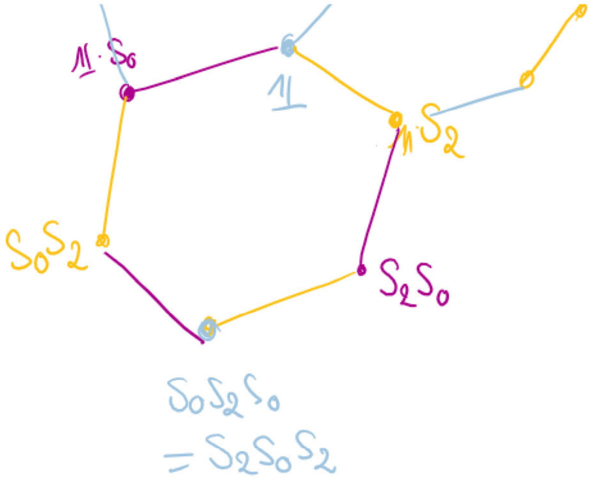
Involutionen ⇝ ungerichtete Kanten

3) $W = \langle s_0, s_1, s_2 \mid s_i^2, (s_is_j)^3\ i \neq j \rangle$

unendlich viele Elemente

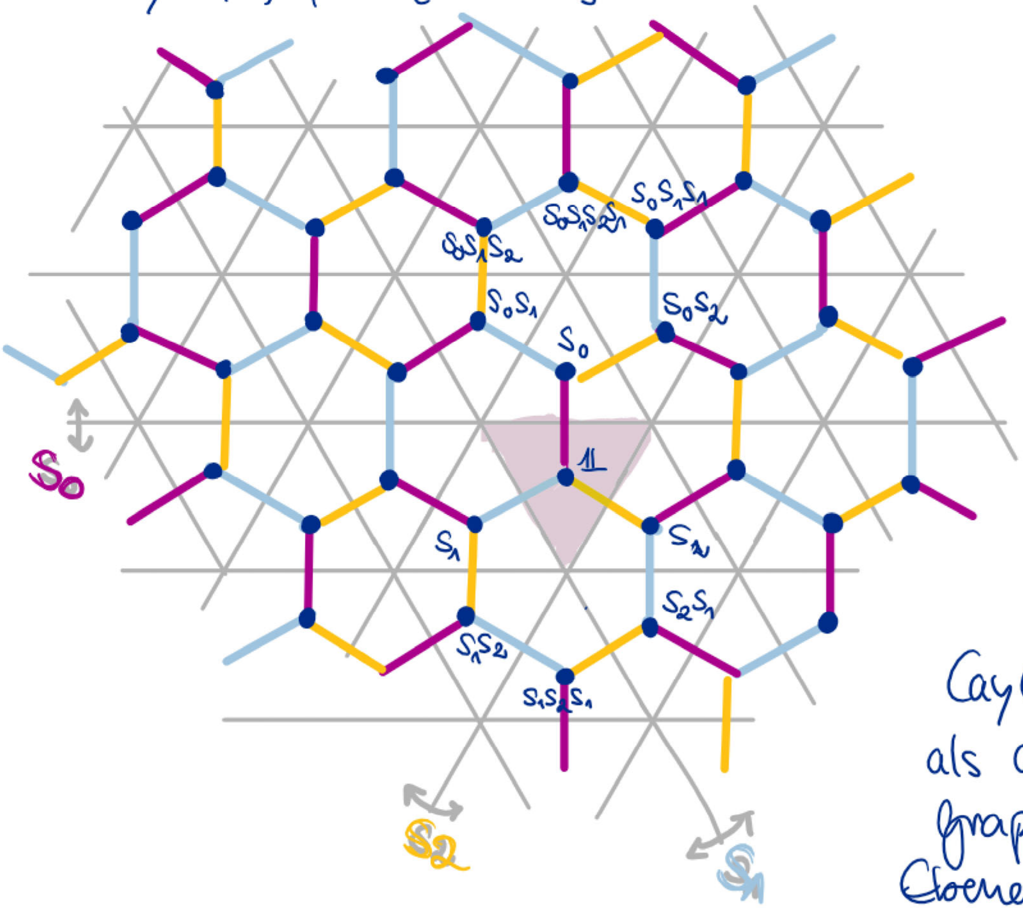
jedes Dreieck ≙ einem Gruppenelement





The Cayley graph is the dual graph of the tiling corresponding to W:

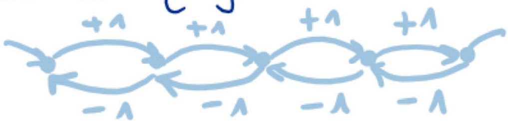
$Cay(W,S)$, $S = \{s_0, s_1, s_2\}$



$Cay(W,S)$
als dualer
Graph in der
Ebenenparkettierung
von (W,S)

4) A non-Coxeter example:

take $G=\mathbb{Z}$ and $S=\{\pm 1\}$ ← no involutions

$Cay(G,S) = \dots$ 
$\dots$

3.9 Remark: Zusammenhang $Cay(W,S)$ und l_S

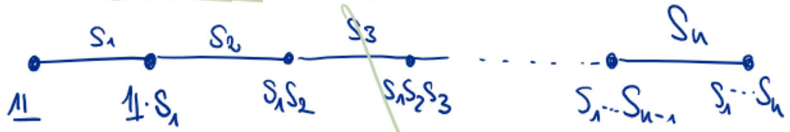
Die Wortmetrik l_S genau die Pfad-Metrik auf $Cay(W,S)$, genauer auf der Eckenmenge von $Cay(W,S)$, ist.

Pfad-Metrik: $d(v_1,v_2)$ = Länge des kürzesten Weges von v_1 nach v_2

Ecken im Graph

$l_S(\mathbb{1},g) = \#$ Buchst. in kürzesten Wort $(s_1 \cdots s_n)$ für $g = s_1 \cdot s_2 \cdot \dots \cdot s_n$

⇝ Pfad:



$\{\mathbb{1}, s_1\}, (s_1, s_1 \cdot s_2), \dots$

$(s_1 \cdots s_i, s_1 \cdots s_i \cdot s_{i+1})$

$\dots (s_1 \cdots s_{n-1}, s_1 \cdots s_n)$

L

Wörter in S
$\hat{=}$
Kantenzügen $Cay(W,S)$

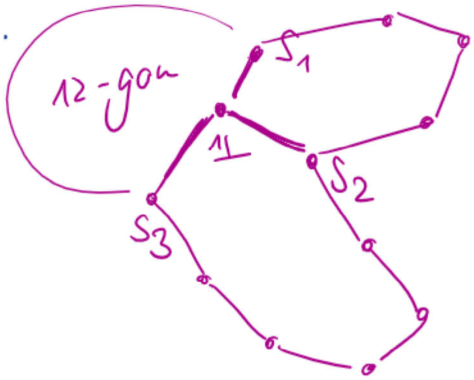
Lemma 3.10

Lemma 3.10

In a Coxeter system (W,S) the generators in S are pairwise distinct.

This is <u>not</u> a priori clear from the definition.
We will see a proof in the next two weeks

z.B. für
$\langle s_1, s_2, s_3 \mid s_i^2, (s_1 s_2)^3, (s_2 s_3)^4, (s_3 \cdot s_1)^6 \rangle$



Prop. 3.11

The Cayley graph $Cay(W,S)$ of a Coxeter system (W,S) is indeed a graph which is connected, simple* and w/o double edges.
einfach

* recall: a graph is <u>simple</u> if it does not contain any loops. i.e. edges are sets not multisets.

<u>Proof:</u> • $Cay(G,S)$ ist immer <u>zusammenhängend</u>, wenn S die Gruppe G <u>erzeugt</u>.
weil alle Elemente $g \in G$ Wörter in S haben
mit $g = s_1 \cdot s_2 \cdots s_n$. $\underbrace{(s_1, \dots, s_n)}$
$\hat{=}$ Pfad in $Cay(G,S)$

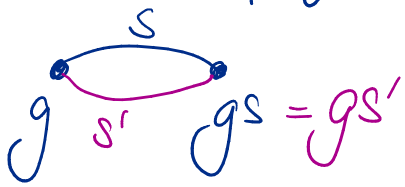
D.h. alle Ecken sind durch einen Pfad mit $\mathbb{1}$

$= \text{Pfad in } Cay(G,S)$

D.h. alle Ecken sind durch einen Pfad mit $\mathbb{1}$ verbunden. Also $Cay(G,S)$ ist zushgd.

(W,S) hat nur Involutionen als Erzeuger
also ist $\mathbb{1} \notin S$ und somit $g \neq gs \ \forall g \in W, s \in S$
$\Rightarrow$ keine Schleifen in $Cay(W,S)$

Keine Doppelkanten folgt aus Lemma 3.10,
denn:



$s \neq s' \ \forall s,s' \in S$.

$\square$