Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Johann Franke

04. Juni 2018

Modulformen 1 – Übungsblatt 6

Sommersemester 2018

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Es sei $k \geq 4$ eine gerade ganze Zahl. Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir (wie in der Vorlesung) die Poincaré-Reihe P_n zum Gewicht k bezüglich $\Gamma(1)$ durch

$$P_n(z) := \frac{1}{2} \sum_{\substack{(c,d)=1 \\ ad-bc=1}} (cz+d)^{-k} e^{2\pi i n \frac{az+b}{cz+d}}.$$

Dabei erstreckt sich die Summation über die Paare $(c,d) \in \mathbb{Z}^2$ mit $\mathrm{ggT}(c,d) = 1$ und zu jedem solchen Paar ist ein Paar $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ mit $ad - bc = 1$ zu wählen.
Fixiere $k \geq 4$. In der Vorlesung haben wir gesehen, dass die Elemente P_n mit $n \geq 1$ den Raum S_k erzeugen.
Zeigen Sie, dass $\{P_1, P_2, ..., P_d\}$ mit $d = \dim_{\mathbb{C}}(S_k)$ eine Basis des Raumes S_k bildet.

Aufgabe 2 (2+1 Punkte)

Es bezeichne $J_k(x)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{C}$ die sogenannte Besselfunktion, gegeben durch

$$J_k(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^k \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}x^2\right)^\ell}{\ell!(k+\ell)!}.$$

(a) Zeigen Sie: für alle $x, z \in \mathbb{C}^\times$ gilt

$$e^{\frac{x}{2}(z-z^{-1})} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x) z^k.$$

(b) Folgern Sie

$$J_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\sin\theta - k\theta)} \mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin\theta - k\theta) \mathrm{d}\theta.$$

Bemerkung: Diese Darstellung ist Ausgangspunkt für den Beweis der in der Vorlesung verwendeten Tatsache

$$J_k(x) = O(\min\{x^{-\frac{1}{2}}, x^k\}).$$

Abgabe: Montag, 11.06, bis spätestens 11 Uhr ct. im Tutorenbriefkasten Nr. 53 in INF 205 im ersten Stock.