Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Johann Franke

02. Juli 2018

Modulformen 1 – Übungsblatt 10

Sommersemester 2018

Aufgabe 1 (2+2+2(+2 Bonus) Punkte)

(a) Es sei $\phi(n)$ die Anzahl der primen Restklassen modulo n, also die Ordnung von $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. Zeigen Sie für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi(n) n^{-s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}.$$

(b) Es sei N eine positive ganze Zahl und $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ ein Homomorphismus multiplikativer Gruppen. Beweisen Sie: Dieser lässt sich über die Festlegung $\chi(m) = 0$ falls $(m, N) > 1$ und $\chi(m + N) = \chi(m)$ für alle ganzen Zahlen $m \in \mathbb{Z}$ zu einer in ganz $\mathbb{Z}$ definierten zahlentheoretischen Funktion ausweiten, welche streng multiplikativ ist.

(c) Definiere

$$L(s;\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}.$$

Zeigen Sie: $\sigma_a(L) = 1$ und zudem $L(s;\chi) \neq 0$ für alle $\mathrm{Re}(s) > 1$.

(d) Es sei nun χ nicht trivial, d.h. der Kern von $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ ist nicht ganz $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$. Zeigen Sie, dass in diesem Falle $\sigma_c(L) = 0$ gilt.

Abgabe: Montag, 09.07, bis spätestens 11 Uhr ct. im Tutorenbriefkasten Nr. 53 in INF 205 im ersten Stock.