Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Johann Franke

18. Juni 2018

Modulformen 1 – Übungsblatt 8

Sommersemester 2018

Aufgabe 1 (1+2+1+2 Punkte)

Es sei $q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ mit $a,b,c \in \mathbb{Z}$ eine positiv definite binäre quadratische Form, d.h. $q(x,y) > 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Die Diskriminante D_q von q ist dabei definiert durch $D_q = b^2 - 4ac$.

Offenbar ist jedes solche q durch eine Matrix $Q = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$ induziert. Wir nennen zwei quadratische Formen q und q' äquivalent, wenn es eine unimodulare Transformation $U \in \Gamma(1)$ gibt mit $Q = U^t Q' U$. Wie man außerdem leicht zeigen kann, ist die Determinante eine Klasseninvariante; aus $q \sim q'$ folgt also notwendigerweise $D_q = D_{q'}$.

(a) Zeigen Sie, dass es sich dabei tatsächlich um eine Äquivalenzrelation handelt.

(b) Definiere nun eine Abbildung $H : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ wie folgt. Setze $H(m) = 0$ für $m < 0$, $H(0) := -\frac{1}{12}$ und $H(m)$ für $m > 0$ als die Anzahl von Äquivalenzklassen positiv definiter binärer quadratischer Formen mit Diskriminante $D = -m$ in dem Sinne, dass Formen, welche zu einem Vielfachen von $x^2 + y^2$ bzw. $x^2 + xy + y^2$ äquivalent sind, nur mit Vielfachheit $\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{1}{3}$ gezählt werden. (Man kann zeigen, dass diese Abbildung tatsächlich wohldefiniert ist, weil nur endlich viele Klassen für $D < 0$.)
Sei $m > 0$. Offenbar gilt dann nach oberer Konstruktion $H(m) \geq 0$. Beweisen Sie, dass $H(m) > 0$ genau dann wenn $m \equiv 0, 3 \mod 4$.

(c) Definiere für reelle Zahlen t, N

$$\frac{1}{1 - tx + Nx^2} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{k+2}(t,N) x^k.$$

Verifizieren Sie $P_4(t,N) = t^2 - N$.

(d) Finden Sie $H(4)$, $H(7)$ und $H(8)$.

Abgabe: Montag, 25.06, bis spätestens 11 Uhr ct. im Tutorenbriefkasten Nr. 53 in INF 205 im ersten Stock.