**Universität Heidelberg**
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Johann Franke

22. Mai 2018

# Modulformen 1 – Übungsblatt 5

Sommersemester 2018

*Sie haben zur Bearbeitung dieses Zettels 2 Wochen Zeit. Insbesondere wird es am Montag den 28.05. keinen neuen Übungszettel geben.*

## Aufgabe 1 (1+3+1+2+2+1+2 Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir einige algebraisch-arithmetischen Eigenschaften der $j$-Funktion untersuchen. Dabei werden uns Methoden unterstützen, die wir beim Studium der Hecke-Operatoren kennen gelernt haben.
Im Folgenden betrachten wir die Menge $\mathfrak{Z} \subset \mathbb{H}$ der sogenannten *complex multiplication points*, kurz CM-Punkte. Diese erhalten ihren Namen dadurch, dass die zugehörigen elliptischen Kurven $\mathbb{C}/\Lambda$ mit $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathfrak{z}\mathbb{Z}$ sog. komplexe Multiplikation besitzen, d.h. dass es ein $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gibt mit $\lambda\Lambda \subset \Lambda$. Man kann zeigen, dass $\mathfrak{Z}$ genau aus den Punkten der oberen Halbebene besteht, die eine quadratische Gleichung über $\mathbb{Z}$ erfüllen, d.h. es gibt $A, B, C \in \mathbb{Z}$ mit $(A, B, C) \neq (0,0,0)$ mit der Eigenschaft

$$A\mathfrak{z}^2 + B\mathfrak{z} + C = 0.$$

Diese charakteristische Eigenschaft wollen wir ohne Beweis voraussetzen.

(a) Zeigen Sie: es ist $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}$ genau dann, wenn es eine Matrix $U \in M(2,\mathbb{Z})$ gibt mit $U \neq mE$ für alle $m \in \mathbb{Z}$ und $\det(U) > 0$, sodass

$$U\mathfrak{z} = \mathfrak{z}.$$

(b) Es sei $m \geq 1$ eine ganze Zahl und wie üblich $\mathscr{M}(m) := \{U \in M(2,\mathbb{Z}) \mid \det(U) = m\}$. Zeigen Sie: es gibt ein Polynom $\Psi_m(X,Y) \in \mathbb{Z}[X,Y]$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Es ist $\Psi_m$ bis auf Vorzeichen normiert und es gilt zudem $\deg(\Psi_m) = \sigma_1(m)$, wenn wir $\Psi_m$ formal als Element von $\mathbb{Z}[X][Y]$ bzw. $\mathbb{Z}[Y][X]$ auffassen.
- (ii) Wir haben $\Psi_m(X,Y) = \pm\Psi_m(Y,X)$.
- (iii) Für jede Matrix $M \in \mathscr{M}(m)$ gilt $\Psi_m(j(Mz), j(z)) \equiv 0$, als meromorphe Funktion in der oberen Halbebene aufgefasst.

**Hinweis:** Betrachten Sie zunächst das Polynom

$$P_m(X, j(z)) := \prod_{\gamma \in \Gamma_1 \setminus \mathscr{M}(m)} (X - j(\gamma z)).$$

*Abgabe: Montag, 04.06, bis spätestens 11 Uhr ct. im Tutorenbriefkasten Nr. 53 in INF 205 im ersten Stock.*

(c) Offenbar ist $\Psi_1(X,Y) = X - Y$ eine Möglichkeit. Wir betrachten jetzt das erste nicht-triviale Beispiel $m = 2$ mit $\Psi_2(X, j(z)) = X^3 - A(z)X^2 + B(z)X - C(z)$. Zeigen Sie, dass $A(z) = j(z)^2 - 1488 j(z) + 162000$.

**Bemerkung:** Man kann dann mit den analog zu zeigenden Ergebnissen

$$B(z) = 1488 j(z)^2 + 407733575 j(z) + 8748000000$$

und

$$C(z) = -j(z)^3 + 162000 j(z)^2 - 8748000000 j(z) + 157464000000000$$

die Darstellung

$$\begin{aligned}\Psi_2(X,Y) = &-X^2Y^2 + X^3 + 1488X^2Y + 1488XY^2 + Y^3 - 162000X^2 \\ &+ 40773375XY - 162000Y^2 + 8748000000X + 8748000000Y \\ &- 157464000000000\end{aligned}$$

folgern.

(d) Verifizieren Sie, dass $(X-Y) \mid \Psi_m(X,Y)$ in $\mathbb{Z}[X,Y]$ genau dann wenn $m$ eine Quadratzahl ist. Insbesondere folgt, dass $\Psi_m(X,Y)$ im allgemeinen nicht irreduzibel ist.

(e) Wir definieren jetzt für $m > 1$

$$\Upsilon_m(X,Y) := \begin{cases} \Psi_m(X,Y)/(X-Y), & \text{falls } m \text{ Quadratzahl,} \\ \Psi_m(X,Y), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass $\Phi_m(X) := \Upsilon_m(X,X)$ ein bis auf Vorzeichen normiertes Polynom in $\mathbb{Z}[X]$ ist mit Grad $\sigma_1^*(m)$ falls $m$ keine Quadratzahl, bzw. $\sigma_1^*(m) - 1$ (und nicht notwendigerweise normiert!), falls $m$ Quadratzahl, wobei $\sigma_1^*(m) := \sum_{d|m} \max(d, m/d)$.

**Hinweis:** Es könnte helfen, $\Phi_m(j(z))$ zu betrachten.

(f) Wir nennen eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ ganz-algebraisch, falls es ganze Zahlen $a_0, \ldots, a_{n-1}$ gibt, so dass

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 = 0.$$

Zeigen Sie, dass $j(\mathfrak{z})$ für alle CM-Punkte $\mathfrak{z}$ eine algebraische Zahl ist, die im Falle, dass $\mathfrak{z}$ von einer Matrix aus $M(2,\mathbb{Z})$ mit Determinante ungleich einer Quadratzahl fixiert wird, ganz-algebraisch ist.

(g) Beweisen Sie, dass $j(\sqrt{2}i) = 8000$ und $j\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right) = -3375$.

**Hinweis:** Verwenden Sie ohne Beweis

$$\Phi_2(X) = -(X-8000)\cdot(X+3375)^2\cdot(X-1728).$$

*Abgabe: Montag, 04.06, bis spätestens 11 Uhr ct. im Tutorenbriefkasten Nr. 53 in INF 205 im ersten Stock.*