

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Johann Franke

14. Mai 2018

Modulformen 1 – Übungsblatt 4

Sommersemester 2018

Aufgabe 1 (1 + 3 + 2 Punkte)

Für $z \in \mathbb{H}$ (= obere Halbebene) definieren wir die *Dedekindsche η -Funktion* durch

$$\eta(z) := q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \quad q := e^{2\pi iz}.$$

Es ist über die Theorie unendlicher Produkte leicht zu sehen, dass $\eta(z)$ dann eine auf $\mathbb{H}$ holomorphe und nullstellenfreie Funktion ist. Im Folgenden möchten wir ein Transformationsgesetz für $\eta(z)$ bestimmen und damit eine Brücke zwischen der Theorie der Modulformen und der Theorie der Partitionen schlagen.

- (a) Man verifiziere für alle $z \in \mathbb{H}$ das Gesetz $\eta(z+1) = e^{\frac{\pi i}{12}} \eta(z)$ und folgere $\eta(z+24) = \eta(z)$.
- (b) Zeigen Sie: es gilt für alle $z \in \mathbb{H}$

$$\eta\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{-iz} \cdot \eta(z).$$

Dabei betrachten wir den Hauptzweig der Quadratwurzel, also jenen, der positiv für reelle $z > 0$ ist.

Hinweis: Integrieren Sie für den Beweis dieser Aussage für fixierte $y > 0$ die Funktionenfolge

$$f_n(w) := -\frac{1}{8w} \cot\left(\pi i \left(n + \frac{1}{2}\right) w\right) \cot\left(\frac{\pi(n + \frac{1}{2})w}{y}\right)$$

in mathematisch positiver Richtung über das Parallelogramm mit Ecken $\pm i$ und $\pm y$ und vollziehen Sie den Übergang $n \rightarrow \infty$.

Bemerkung: (b) liefert einen Beweis für die Formel $\eta^{24}(z) = \Delta(z) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}$.

- (c) Es bezeichne $p(n)$ die Partitionsfunktion, diese ist definiert als

$$p(n) := \#\{(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k, k \in \mathbb{N} \mid n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq \dots \geq n_k, n_1 + n_2 + \dots + n_k = n\}.$$

Abgabe: Dienstag, 22.05, bis spätestens 11 Uhr ct. im Tutorenbriefkasten Nr. 53 in INF 205 im ersten Stock.

Ferner definieren wir $p(0) := 1$. Beispielsweise ist damit $p(4) = 5$, da

$$\begin{aligned} 4 &= 4 \\ &= 3 + 1 \\ &= 2 + 2 \\ &= 2 + 1 + 1 \\ &= 1 + 1 + 1 + 1. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

$$\frac{1}{\eta(24z)} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^{24n-1} = \frac{1}{q} + q^{23} + 2q^{47} + 3q^{71} + 5q^{95} + 7q^{119} + 11q^{143} + \dots.$$

Bemerkung: Das „Partitionsproblem“, also die Frage, wie sich $p(n)$ asymptotisch verhält und ob es für Werte n schnell berechnet werden kann, gilt als gelöst, da im letzten Jahrhundert zahlreiche exakte Darstellungen für $p(n)$ (z.B. in Termen sehr schnell konvergenter Reihen) gefunden wurden.