Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Johann Franke

07. Mai 2018

Modulformen 1 – Übungsblatt 3

Sommersemester 2018

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Es sei $\tau(n)$ Ramanujan's τ-Funktion und p eine beliebige Primzahl. Zeigen Sie: $\tau(p^2) \neq 0$.

Aufgabe 2 (0,5+1+1,5+1 Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir den *Satz von Picard* mit Hilfe von Modulfunktionen beweisen. Dieser besagt: Es seien $z_1 \neq z_2$ zwei komplexe Zahlen. Dann ist jede ganze Funktion

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\}$$

konstant. Dafür definieren wir den „exakten Fundamentalbereich“

$$\mathscr{F}_{\text{ex}} := \left\{ z \in \mathbb{H} \mid -\frac{1}{2} < \text{Re}(z) \leq \frac{1}{2}, |z| \geq 1 \text{ und } |z| > 1 \text{ wenn } -\frac{1}{2} < \text{Re}(z) < 0 \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass der Satz von Picard äquivalent ist zu der Aussage, dass jede ganze Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0, 1728\}$ konstant ist.

(b) Es sei ein ganzes $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0, 1728\}$ gegeben. Wähle ein $z_0 \in \mathscr{F}_{\text{ex}}$ derart, dass $j(z_0) = g(0)$. Zeigen Sie, dass es eine offene Umgebung $0 \in U \subset \mathbb{C}$ und eine holomorphe Funktion $\varphi : U \to \mathbb{H}$ gibt, so dass $j(\varphi(z)) = g(z)$ in U und $\varphi(0) = z_0$.

(c) Es sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ eine stetige Kurve. Wir sagen, dass sich eine in einer Kreisscheibe $U = U_\delta(\gamma(0))$ holomorphe Funktion f analytisch entlang der Kurve γ fortsetzen lässt, wenn es eine Kollektion (f_t, U_t) aus in U_t holomorphen Funktionen f_t gibt mit

   (i) $f_0 = f$ und $U_0 = U$;

   (ii) für jedes $t \in [0,1]$ ist U_t eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt $\gamma(t)$ und $f_t : U_t \to \mathbb{C}$ analytisch;

   (iii) für jedes $t \in [0,1]$ existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass für alle $t' \in [0,1]$ mit $|t - t'| < \varepsilon$ gilt $\gamma(t') \in U_t$, d.h. insbesondere $U_t \cap U_{t'} \neq \emptyset$, und es gilt $f_t|_{U_t \cap U_{t'}} = f_{t'}|_{U_t \cap U_{t'}}$.

   Zeigen Sie, dass sich die Funktion $\varphi(z)$ aus Teil (b) bezüglich jeder Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(0) = 0$ analytisch fortsetzen lässt.

Abgabe: Montag, 14.05, bis spätestens 11 Uhr ct. im Tutorenbriefkasten Nr. 53 in INF 205 im ersten Stock.

(d) Zeigen Sie, dass $\varphi(z)$ eine ganze Funktion ist und folgern Sie den Satz von Picard.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis den sogenannten *Monodromiesatz* verwenden: Es sei $U(w_0)$ eine offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt w_0 und $f : U(w_0) \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion. Ferner sei $w_0 \neq w_1$ ein weiter Punkt in $\mathbb{C}$ und $(\gamma_s)_{s\in[0,1]}$ eine Familie von Kurven $\gamma_s : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma_s(0) = w_0$ und $\gamma_s(1) = w_1$ für alle s, so dass die Abbildung $H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}, (s,t) \mapsto \gamma_s(t)$ stetig ist (mit anderen Worten, die Kurven γ_0 und γ_1 sind homotop). Lässt sich f entlang jeder Kurve γ_s analytisch fortsetzen, so liefern die Fortsetzungen von f entlang γ_0 und γ_1 bei w_1 den selben Wert.