Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Johann Franke

23. April 2018

Modulformen 1 – Übungsblatt 1

Sommersemester 2018

Aufgabe 1 (2+3+1 Punkte)

Wir betrachten in dieser Aufgabe die Diskriminante $\Delta = \frac{1}{1728}(E_4^3 - E_6^2)$, wobei E_4 und E_6 gegeben sind durch

$$E_4(z) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n,$$

$$E_6(z) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) q^n.$$

Es ist bekannt, dass Δ eine Spitzenform von Gewicht 12 bezüglich der vollen Modulgruppe ist. Wir definieren zudem die Ramanujan τ-Funktion durch

$$\Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n = q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + \cdots$$

(a) Zeigen Sie: $\tau(n) \in \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Beweisen Sie die Identität

$$\tau(n) = \frac{65}{756}\sigma_{11}(n) + \frac{691}{756}\sigma_5(n) - \frac{691}{3}\sum_{m=1}^{n-1} \sigma_5(m)\sigma_5(n-m).$$

(c) Folgern Sie die für alle n gültige Kongruenz von Ramanujan

$$\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \mod 691.$$

– Bitte nur in Zweiergruppen abgeben!! –

Abgabe: Montag, 30.04, bis spätestens 11 Uhr ct. im Tutorenbriefkasten Nr. 53 in INF 205 im ersten Stock.