Modulformen 1 – Übungsblatt 0

Sommersemester 2018

Aufgabe 1 (0 Punkte)

Wir definieren die *Gammafunktion* für alle komplexen Zahlen s mit $\operatorname{Re}(s) > 0$ durch

$$\Gamma(s) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Gammafunktion eine in ihrem Definitionsbereich holomorphe Funktion ist und verifizieren Sie $\Gamma(1) = 1$.
- (b) Beweisen Sie die Funktionalgleichung $s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$. (Hinweis: Partielle Integration). Folgern Sie induktiv, dass sich die Gammafunktion holomorph in $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}_0$ fortsetzen lässt mit einfach Polstellen für $-n \in -\mathbb{N}_0$. Zeigen Sie

$$\operatorname{res}_{s=-n} \Gamma(s) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

- (c) In der Funktionentheorie 2 haben wir die wichtige Stirling-Formel bewiesen, diese charakterisiert die Gammafunktion wesentlich in Termen elementarer Funktionen. Es gilt in $\mathbb{C}_-$:

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} e^{H(z)},$$

wobei die holomorphe Funktion $H: \mathbb{C}_- \rightarrow \mathbb{C}$ in jedem Winkelbereich $W_\delta = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi + \delta < \operatorname{Arg}(z) < \pi - \delta\}$ für $|z| \rightarrow 0$ gegen 0 strebt.

Es ist $s = \sigma + it$. Zeigen Sie, dass die Gammafunktion in jedem Vertikalstreifen $V_{\sigma_1, \sigma_2} = \{s \in \mathbb{C} \mid \sigma_1 < \sigma < \sigma_2\} \cap \{s \in \mathbb{C} \mid |t| \geq 1\}$ beschränkt ist und außerdem für jedes $\varepsilon > 0$ ein $C_{\sigma_1, \sigma_2, \varepsilon} > 0$ existiert mit

$$|\Gamma(s)| < C_{\sigma_1, \sigma_2, \varepsilon} e^{(-\frac{\pi}{2} + \varepsilon)|t|}$$

für alle $s \in V_{\sigma_1, \sigma_2}$.

- (d) Es sei $c > 0$ eine beliebige, positive reelle Zahl. Beweisen Sie für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(x) > 0$:

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) x^{-s} ds.$$

Hinweis: Integrieren Sie zunächst über das Rechteck $R(n, T)$ mit den Ecken $c \pm iT$ und $\frac{1}{2} - n \pm iT$ für $T > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und lassen Sie zuerst T und dann n gegen unendlich gehen. Mehr Literatur zur Gammafunktion findet sich in E. Freitag, R. Busam: *Funktionentheorie 1* sowie W. Kohlen: *Funktionentheorie 2* (Skript zur Vorlesung, Download in der Fachschaft).

Aufgabe 2 (0 Punkte)

Wir betrachten in dieser Aufgabe die sog. *volle Modulgruppe* Γ , welche durch

$$\Gamma := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathbb{Z}^{2 \times 2} \mid \det(M) = 1\}$$

gegeben ist.

- (a) Zeigen Sie, dass die Gruppe Γ auf der oberen Halbebene $\mathbb{H} := \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ operiert via der Vorschrift

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau := \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Ist diese Operation transitiv? Diese auf $\mathbb{H}$ definierte Operation definiert wie üblich eine Äquivalenzrelation.

- (b) Eine offene, zusammenhängende Menge $\mathcal{F} \subset \mathbb{H}$ heißt *Fundamentalebene* bezgl. der Operation von Γ , falls für je ein $z \in \mathbb{H}$ ein Punkt $z^* \in \overline{\mathcal{F}}$ (Abschluss) und ein $M \in \Gamma$ existiert, so dass $Mz^* = z$ gilt und ferner je zwei Punkte $z_1 \neq z_2$ in $\mathcal{F}$ nicht äquivalent zueinander sind. Recherchieren Sie einen Fundamentalebene für die volle Modulgruppe.
- (c) Sei $k \in \mathbb{Z}$. Eine meromorphe Funktion $f: \mathbb{H} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ heißt *Modulfunktion zum Gewicht k* zur vollen Modulgruppe, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) Es gilt $(c\tau + d)^{-k} f(M\tau) = f(\tau)$ für alle $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$.

(ii) f besitzt eine Fourierreiheentwicklung

$$f(\tau) = \sum_{n=-m}^{\infty} a(n) q^n, \quad q := e^{2\pi i \tau},$$

mit $m \in \mathbb{N}$, welche auf einem Abschnitt $\{\tau \in \mathbb{H} \mid \mathrm{Im}(\tau) > c_0 > 0\}$ absolut (sowie auf Kompakta gleichmäßig) konvergiert.

Zeigen Sie, dass es keine nicht-trivialen Modulfunktionen ungeraden Gewichts gibt.

Eine in ganz $\mathbb{H}$ holomorphe Modulfunktion von Gewicht k bezüglich Γ mit Fourierreiheentwicklung $f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) q^n$ nennen wir auch *Modulform von Gewicht k* bezüglich Γ .