Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Johann Franke

15. Januar 2018

Funktionentheorie 2 – Übungsblatt 11

Wintersemester 2017/18

Aufgabe 1 (1+1+2 Punkte)

Für gerades $k \geq 4$ definiert man die normierten Eisensteinreihen vom Gewicht k durch

$$E_k(z) := \frac{G_k(z)}{2\zeta(k)} \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{H}.$$

(a) Zeigen Sie

$$E_4(z) = 1 + 240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)e^{2\pi i n z} \quad \text{und} \quad E_6(z) = 1 - 504\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_5(n)e^{2\pi i n z}.$$

(b) Weisen Sie nach, dass $\sigma_3(m) \equiv \sigma_5(m) \bmod (12)$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

(c) Zeigen Sie: Durch $\Delta := \frac{1}{1728}\left(E_4^3 - E_6^2\right)$ wird eine von 0 verschiedene Spitzenform vom Gewicht 12 für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ definiert, und diese hat ganze Fourierkoeffizienten.

Aufgabe 2 (0 Punkte)

Seien

$$\Gamma_0(N) = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z});\ c \equiv 0 \bmod (N)\right\} \quad \text{und} \quad G_0(N) = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2\big(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\big);\ c = 0\right\}.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\Gamma_0(N)$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und somit auch $G_0(N)$ eine von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$.

(b) Die folgende Abbildung ist bijektiv:

$$\Gamma_0(N)\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\bmod (N)} G_0(N)\backslash \mathrm{SL}_2\big(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\big).$$

Sei ab sofort $N = p$ eine Primzahl.

(c) Folgern Sie aus (b), dass $\sharp\big(\Gamma_0(p)\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big) = p + 1$.

(d) Bestimmen Sie ein Vertretersystem für $\Gamma_0(p)\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Hinweis zu (b): Das Hauptproblem ist hier die Surjektivität. Es ist leicht, Urbilder der Form $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$ zu finden. Um nun auch Urbilder in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ zu erhalten, zeigen Sie zunächst, dass es für alle Paare $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ mit $\mathrm{ggT}(c, d, N) = 1$ ein $x \in \mathbb{Z}$ gibt mit $\mathrm{ggT}(c, d + xN) = 1$ und ändern Sie dann a und b derart ab, dass die Determinante 1 wird.

Abgabe: Montag, 22.01, bis spätestens 11 Uhr ct. in den Tutorenbriefkästen in INF 205 im ersten Stock.