Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Johann Franke

04. Dezember 2017

Funktionentheorie 2 – Übungsblatt 7

Wintersemester 2017/18

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei f eine ganze Funktion und $L \subset \mathbb{C}$ ein Gitter. Zu jedem $\omega \in L$ existiere ein Polynom P_ω derart, dass

$$f(z+\omega) = f(z) + P_\omega(z) \quad (\forall z \in \mathbb{C}).$$

Zeigen Sie, dass dann f selbst ein Polynom ist.

Aufgabe 2 (0 Punkte)

(a) Zeigen Sie die Differentialgleichungen

$$2\wp''(z) = 12\wp(z)^2 - g_2 \quad \text{und} \quad \wp'''(z) = 12\wp(z)\wp'(z).$$

(b) Stellen Sie $(\wp')^{-n}$ für $1 \le n \le 3$ in der Normalform $R(\wp) + S(\wp)\cdot\wp'$ mit rationalen Funktionen R und S dar.

(c) Folgern Sie aus (a) die folgende Identität von Eisensteinreihen für $n \ge 4$:

$$(2n-1)(2n+1)(n-3)G_{2n} = 3\sum_{k=2}^{n-2}(2k-1)(2n-2k-1)G_{2k}G_{2n-2k}.$$

Aufgabe 3 (0 Punkte)

Es sei $\tau \in \mathbb{H}$, wobei $\mathbb{H}$ wie gewöhnlich die obere Halbebene bezeichnet, und L ein komplexes Gitter gegeben durch

$$L = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau.$$

Der Quotient $\mathbb{C}/L$ wird via der natürlichen Projektion

$$\begin{aligned} p : \mathbb{C} &\to \mathbb{C}/L \\ z &\mapsto z \mod L \end{aligned}$$

zu einer topologischen Gruppe, indem wir eine Teilmenge $U \subset \mathbb{C}/L$ als offen definieren, wenn $p^{-1}(U)$ offen ist. Wir wollen in dieser Aufgabe zeigen, dass $X = \mathbb{C}/L$ die Struktur einer kompakten Riemannschen Fläche trägt.

Abgabe: Montag, 11.12, bis spätestens 11 Uhr ct. in den Tutorenbriefkästen in INF 205 im ersten Stock.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}/L$ ein zusammenhängender Hausdorffraum ist.

(b) Es trägt $\mathbb{C}/L$ die Struktur einer kompakten Riemannschen Fläche.

Hinweis: Überlegen Sie sich, dass zu jedem $a \in \mathbb{C}/L$ eine (zusammenhängende) Umgebung $a \in U_a$ existiert, so dass $p^{-1}(U_a)$ in unendlich viele (disjunkte) Zusammenhangskomponenten $p^{-1}(U_a) = \bigcup_{w \in L}(V_a + w)$ zerfällt. Beweisen Sie, dass durch die Kollektion $\{\varphi_a : U_a \to V_a\}_{a \in \mathbb{C}/L}$ ein komplexer Atlas auf $\mathbb{C}/L$ definiert wird.

(c) Zeigen Sie: $\mathscr{M}(\mathbb{C}/L) = \mathbb{C}(\wp, \wp')$.

(d) Folgern Sie, dass $\mathbb{C}/L$ nicht konform äquivalent zur Zahlkugel $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ist.

Bemerkung: Wir haben nun also ein Beispiel einer kompakten Riemannschen Fläche gefunden, welche sich in ihrer Natur von der Zahlkugel gänzlich unterscheidet. Beim genauen Studium wird dies dadurch offenkundig, dass Torus und Zahlenkugeln unterschiedliche Geschlechter besitzen.