Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Johann Franke

27. November 2017

Funktionentheorie 2 – Übungsblatt 6

Wintersemester 2017/18

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei f eine ungerade[1] elliptische Funktion zum Gitter $L = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$. Zeigen Sie, dass $\frac{\omega_1}{2}$ dann eine Null- oder Polstelle ungerader Ordnung von f ist.

Aufgabe 2 (0 Punkte)

Es seien $L = \{n\omega_1 + m\omega_2, n, m \in \mathbb{Z}\}$ und $L' = \{n\omega_1' + m\omega_2', n, m \in \mathbb{Z}\}$ Gitter. Zeigen Sie: es gilt $L = L'$ genau dann, wenn es eine Matrix $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ gibt mit $A \cdot \binom{\omega_1}{\omega_2} = \binom{\omega_1'}{\omega_2'}$.

Aufgabe 3 (0 Punkte)

Es sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und $f : X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ eine nicht-konstante meromorphe Funktion. Wie wir bereits gesehen haben, ist eine solche Abbildung stets surjektiv. Wir wissen außerdem: ist $x \in U \subset X$ ein Punkt, so gibt es Karten $\varphi : U \to V$ von X und $\xi : U' \to V'$ von $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ mit $f(U) \subset U'$, $\varphi(x) = 0$ und $\xi(f(x)) = 0$, so dass sich $g = \xi \circ f \circ \varphi^{-1}$ lokal in der Form $g(z) = z^k$ mit einem $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ schreiben lässt. Wir bezeichnen dieses k als Ordnung von f in dem Punkt x und schreiben hierfür $\mathrm{ord}_{z=x}(f) = k$. Ist $k = 1$, so ist f lokal biholomorph und wir nennen x unverzweigt, in allen anderen Fällen ist x ein sogenannter Verzweigungspunkt.

(a) Zeigen Sie, dass f nur endlich viele Verzweigungspunkte $x \in X$ hat.

Mit diesen Daten können wir f nun eine globale Ordnung zuweisen, nämlich: ist $y \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ beliebig, so setzen wir

$$\mathrm{ord}(f)_y := \sum_{x \in f^{-1}(y)} \mathrm{ord}_{z=x}(f)$$

(b) Zeigen Sie, dass die ganze Zahl (warum?) $\mathrm{ord}(f)_y$ unabhängig von y ist. Wir schreiben dann $\mathrm{ord}(f) := \mathrm{ord}(f)_y$ und nennen dies die Ordnung von f.

(c) X ist genau dann konform äquivalent zu $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, falls es ein $f : X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ der Ordnung 1 gibt.

[1] Entsprechend dem Begriff aus der reellen Analysis ist damit $f(-z) = -f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gemeint.

Abgabe: Montag, 04.12, bis spätestens 11 Uhr ct. in den Tutorenbriefkästen in INF 205 im ersten Stock.

Ein Hinweis der Fachschaft:

Mathematikvollversammlung am 29. November 2017

Beginn 14 Uhr c.t., INF 205 (Mathematikon), PC-Pools 1 und 2
Unsere Fachschaft diskutiert und beschließt u.A. wie durch ihre ausführenden Organe Einfluss auf Studium und Lehre im Sinne der Studierenden genommen werden soll. Wir veranstalten deshalb zum ersten Mal die MatheVV, bei der die anwesenden Studis über aktuelle Themen aus Studium und Lehre diskutieren. In die Diskussion sollen Themen einfließen, die Deine aktuelle Studiensituation betreffen. Diese Möglichkeit bietet dir die kommende MatheVV, in deren Anschluss eine reine Mathematik-Fachschaftssitzung stattfindet. Dort hast Du mit deiner Anwesenheit automatisch Stimmrecht. Entscheide mit über Dein Studium und nutze Deine Stimme! Wir sorgen für Getränke während der Veranstaltung und im Anschluss treffen wir uns mit den Studis der Physik- und Informatikvollversammlungen zu Punsch und Keksen.

Mehr Infos unter: mathphys.info/w/mathevv_ws17
Ihr findet uns auch auf Twitter als @MathPhysInfo
und Facebook unter fb.com/fachschaft.mathphysinfo