Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Johann Franke

06. November 2017

Funktionentheorie 2 – Übungsblatt 3

Wintersemester 2017/18

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für jedes $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ durch die Zuordnung

$$z \mapsto \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - q^{n+1} z\right)$$

eine ganze Funktion f definiert wird, die für alle $z \in \mathbb{C}$ der Funktionalgleichung

$$f(z) = \left(1 - qz\right) f(qz)$$

genügt. Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von f um $z = 0$.

Aufgabe 2 (0 Punkte)

Sei f eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion mit lauter einfachen Polen und ganzzahligen Residuen.

Zeigen Sie, dass es eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion g gibt mit

$$f = \frac{g'}{g}.$$

Hinweis: Ist S die Polstellenmenge von f, so finden Sie mithilfe des Weierstraßschen Produktsatzes eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion h, deren Null- und Polstellen genau in S liegen, und zwar so, dass $\operatorname{ord}_{z=s} h = \operatorname{res}_{z=s} f$ für alle $s \in S$ gilt. Betrachten Sie nun zunächst

$$f - \frac{h'}{h}.$$

Aufgabe 3 (0 Punkte)

Es sei X eine Riemannsche Fläche und $U \subseteq X$ offen. Eine Abbildung $f : U \to \mathbb{C}$ heißt holomorph, falls für jede Karte $\varphi_i : U_i \to V_i$ die Funktion

$$f \circ \varphi_i^{-1} : \varphi(U \cap U_i) \to \mathbb{C}$$

Abgabe: Montag, 13.11, bis spätestens 11 Uhr ct. in den Tutorenbriefkästen in INF 205 im ersten Stock.

holomorph ist. Die Menge aller auf U holomorphen Funktionen definieren wir als $\mathscr{O}(U)$. Zeigen Sie den Riemannschen Hebbarkeitssatz:

(a) Sei U eine offene Teilmenge von X und $a \in U$ ein Punkt. Ferner sei $f \in \mathscr{O}(U \setminus \{a\})$ beschränkt in einer offenen Umgebung von a. Dann lässt sich f auf eindeutige Weise zu einer Funktion $\tilde{f} \in \mathscr{O}(U)$ fortsetzen.

Nehme nun an, X und Y seien Riemannsche Flächen. Wir bezeichnen dann eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ als holomorph, falls für jedes Paar an Karten $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ von X und $\varphi_2 : U_2 \to V_2$ von Y mit $f(U_1) \subset U_2$ die Abbildung

$$\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : V_1 \to V_2$$

holomorph ist. Zeigen Sie den Identitätssatz:

(b) Seien X, Y zwei Riemannsche Flächen und $f_1, f_2 : X \to Y$ zwei holomorphe Abbildungen, welche auf einer Menge $A \subset X$ übereinstimmen, welche einen Häufungspunkt a in X besitzt. Dann sind f_1 und f_2 bereits identisch.