Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Johann Franke

30. Oktober 2017

Funktionentheorie 2 – Übungsblatt 2

Wintersemester 2017/18

Aufgabe 1 (2 + 2 Punkte)

(a) Untersuchen Sie die folgenden Produkte auf Konvergenz und ermitteln Sie gegebenenfalls ihren Wert:

a) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)$,

b) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$.

(b) Sei $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$. Zeigen Sie die Konvergenz des Produkts $\prod_{p \text{ prim}}\left(1-p^{-s}\right)^{-1}$ und folgende Identität:

$$\prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Hinweis: Betrachten Sie für ein $N \in \mathbb{N}$ zunächst das entsprechende Produkt über die Primzahlen $\leq N$.

Aufgabe 2 (0 Punkte)

Es sei $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g_k(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^{2^k}}{n^{2^k}}\right)$$

ganz ist und bestimmen Sie einen geschlossenen Ausdruck für g_k in Termen elementarer Funktionen.

Aufgabe 3 (0 Punkte)

Es sei X ein nicht-leerer zusammenhängender, hausdorffscher topologischer Raum derart, dass es zu jedem Punkt $a \in X$ eine offene Umgebung $a \in U \subseteq X$ gibt, so dass U homöomorph zu einem offenen Teil V von $\mathbb{C}$ ist. Solch einen Homöomorphismus $\varphi : U \to V$ bezeichnen wir auch als *(komplexe) Karte*. Zwei Karten $\varphi_i : U_i \to V_i$ und $\varphi_j : U_j \to V_j$ heißen *biholomorph verträglich*, falls die Abbildung

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

biholomorph ist. Ein *(komplexer) Atlas* $\mathfrak{A}$ ist eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ zusammen mit einer Kollektion von Karten $\{\varphi_i : U_i \to V_i\}_{i \in I}$, welche allesamt biholomorph verträglich sind. Zwei Atlanten $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ heißen analytisch äquivalent, falls ihre Vereinigung $\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2$ wieder ein komplexer Atlas ist.

(a) Zeigen Sie, dass die eben definierte Relation eine Äquivalenzrelation ist.

Unter eine *komplexen Struktur* auf X verstehen wir eine Äquivalenzklasse Σ von analytisch äquivalenten Atlanten. Ein Paar (X, Σ) bezeichnen wir als *Riemannsche Fläche*. Ist Σ aus dem Kontext klar, lassen wir es bei dieser Notation weg und sagen, X sei eine Riemannsche Fläche.

(b) Zeigen Sie, dass jedes Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ eine Riemannsche Fläche ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Riemannsche Zahlenkugel $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ eine (kompakte) Riemannsche Fläche ist.

Erinnerung: Die Zahlkugel ist definiert durch die Vereinigung $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, wobei ∞ ein Symbol ist, welches durch $\frac{1}{\infty} := 0$ definiert ist. Eine geeignete Topologie auf dem $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ist gegeben durch die gewöhnlichen offenen Mengen $V \subset \mathbb{C}$ zusammen mit Mengen $V \cup \{\infty\}$, wobei V das Komplement einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{C}$ ist. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass Möbiustransformationen stetig auf $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sind.