Ruprecht-Karls Universität Heidelberg
Fakultät für Mathematik und Informatik

Bachelorarbeit im Fach Mathematik

Die Zirkelmethode und ihre Anwendung auf das Waringsche Problem

Vorgelegt von

Johann Franke

Geboren am 28. September 1992 in Heidelberg

am

26. April 2016

Wissenschaftlicher Betreuer:

Prof. Dr. Winfried Kohnen

Abstract

Waring's problem is concerned with the question, whether a given positive integer n can be written as the sum of a certain number of non-negative k-th powers and one can ask if such a representation exists for all positive integers n given a fixed number s of k-th powers. This is a generalization of a classical result in number theory - Lagrange's four-square theorem - which states, that every positive integer is the sum of four squares. We develop the so called Circle method by Hardy and Littlewood and prove a special case of Waring's problem, namely that for every integer $k \geq 3$ there is a number $g(k)$ such that every positive integer n can be written as the sum of at least $g(k)$ k-th powers.

Zusammenfassung

Das Waringsche Problem beschäftigt sich mit der Frage, ob sich eine gegebene positive ganze Zahl n als Summe nicht-negativer k-ter Potenzen einer gewissen Anzahl schreiben lässt und ob es eine feste Anzahl s gibt, sodass eine solche Schreibweise für alle positiven Zahlen n möglich ist. Dies stellt eine direkte Verallgemeinerung des klassischen Vier-Quadrate-Satzes dar, welcher aussagt, dass sich jede natürliche Zahl als Summe von vier Quadratzahlen ausdrücken lässt. Wir entwickeln die sogenannte Zirkelmethode von Hardy und Littlewood und beweisen mit ihrer Hilfe eine Teilaussage des Waringschen Problems, nämlich, dass es für jede ganze Zahl $k \geq 3$ eine Zahl $g(k)$ gibt, sodass sich jedes n als Summe von $g(k)$ nicht-negativen k-ten Potenzen schreiben lässt.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Grundlagen **7**

3 Die Farey-Zerlegung des Kreises **11**

3.1 Farey-Brüche . . . 12

3.2 Major und minor arcs . . . 17

4 Anwendung auf das Waringsche Problem **21**

4.1 Notationen . . . 21

4.2 Die Funktion $\theta_k(z)$ und ihre elementaren Eigenschaften . . . 23

4.3 Die singuläre Reihe $\mathcal{S}_s(n)$ . . . 27

4.4 Verhalten von $\theta_k(z)$ auf den minor arcs . . . 41

4.5 Verhalten von $\theta_k(z)$ auf den major arcs . . . 53

4.5.1 Eine andere Darstellung für $\theta_k(z)$ auf dem major arc $\xi_{p,q}$ . . . 54

4.5.2 Asymptotisches Verhalten der Funktionen $\psi(m)$ und $\chi(m)$ . . . 57

4.6 $\theta_k(z)$ auf den minor und major arcs . . . 67

4.7 Approximation der Funktion $\varphi_{p,q}(z)$ mittels Polylogarithmen . . . 71

4.8 Asymptotisches Verhalten der Koeffizienten $r_{k,s}(n)$ . . . 81

5 Ausblick **87**

1 Einleitung

Die additive Zahlentheorie beschäftigt sich mit dem Problem, ob sich eine gegebene natürliche Zahl n als Summe k nicht-negativer ganzer Zahlen schreiben lässt, die bestimmte Eigenschaften besitzen. Sind also eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ und eine nicht leere Teilmenge $L \subset \mathbb{N}_0$ gegeben, so stellt sich die Frage nach der Existenz nicht notwendig paarweise verschiedener Elemente $n_1, n_2, ..., n_s \in L$, sodass

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n. \tag{1.0.1}$$

Für L können wir beispielsweise die Menge aller Primzahlen, ungeraden Zahlen, Zweierpotenzen usw. festlegen. Weiterführend kann untersucht werden, wie viele Möglichkeiten es für eine Darstellung der Form (1.0.1) gibt. Mit anderen Worten: wie viele s-Tupel $(n_1, n_2, ..., n_s) \in L^s$ besitzen die Eigenschaft $n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n$ für eine feste Zahl n? Solche quantitativen Fragestellungen sind im Allgemeinen wesentlich schwerer zu beantworten. Weiter gilt hierbei grundsätzlich zu unterscheiden, ob die Reihenfolge der Summanden eine Rolle spielen soll oder nicht.

Das sogenannte Waringsche Problem[1] fragt nach der Darstellbarkeit natürlicher Zahlen als Summe einer festen Anzahl nicht-negativer k-ter Potenzen ganzer Zahlen. Dies ist ein Spezialfall der obigen Problemstellung, wenn wir L als die Menge der natürlichen Zahlen, der Quadratzahlen, der Kubikzahlen usw. festlegen und s auf einen bestimmten Wert fixieren. Für $k = 1$ ist das Waringsche Problem leicht zu beantworten: offenbar lässt sich jede positive ganze Zahl als Summe einer nicht negativen ganzen Zahl schreiben. Wir setzen daher stets $k \geq 2$ voraus.

Ist es tatsächlich möglich, eine natürliche Zahl n als Summe s nicht-negativer k-ter Potenzen zu schreiben, also besitzt die Gleichung

$$n = x_1^k + \cdots + x_s^k$$

[1]Nach Edward Waring, 1736 - 1798

eine nicht-negative ganzzahlige Lösung, dann folgt sofort, dass sie auch als Summe von $s' > s$ k-ten Potenzen geschrieben werden kann, da wir 0^k ebenfalls als k-te Potenz auffassen. Gibt es also eine Zahl s, sodass sich *jede* natürliche Zahl als Summe von s positiven k-ten Potenzen schreiben lässt, muss es bereits einen *kleinsten* Wert s geben, für den dies richtig ist. Diesen bezeichnen wir fortan als $g(k)$. Das Waringsche Problem fragt also, ob $g(k)$ für jede natürliche Zahl k existiert und endlich ist.
Es ist schnell ersichtlich, dass $k \leq g(k)$ sein muss, denn: die Anzahl der Werte x, für die $x^k \leq n$ gilt, ist nicht größer als $n^{1/k}+1$. Demnach ist die Anzahl aller Tupel $(x_1, ..., x_{k-1})$ mit $x_1^k + \cdots + x_{k-1}^k \leq n$ nicht größer als

$$(n^{1/k} + 1)^{k-1} = n^{(k-1)/k} + O(n^{(k-2)/k}).$$

Also sind die meisten Zahlen nicht durch $k-1$ oder weniger k-te Potenzen darstellbar. Tatsächlich hat bereits Waring, jedoch ohne stichhaltigen Beweis, behauptet, dass sich jede natürliche Zahl als Summe von 4 Quadraten, 9 Kuben und 19 vierten Potenzen schreiben lässt, dass also $g(2) = 4$, $g(3) = 9$ und $g(4) = 19$ gilt. Heute weiß man, dass diese Angaben alle korrekt sind. Die moderne Zahlentheorie ist jedoch, unter anderem hinsichtlich dieser Spezialfälle, an einer abgewandelten Fragestellung noch viel interessierter. Nehmen wir an, dass $k = 3$ ist, so lässt sich jede Zahl als Summe von neun Kubikzahlen schreiben. Die zwei Zahlen $23 = 2 \cdot 2^3 + 7 \cdot 1^3$ und $239 = 2 \cdot 4^3 + 4 \cdot 3^3 + 3 \cdot 1^3$ können *nicht* als Summe von acht Kubikzahlen geschrieben werden. Bemerkenswerterweise ist durch Arbeiten von L. E. Dickson (vgl. [Di]) heute bewiesen, dass diese Zahlen die einzigen natürlichen Zahlen sind, welche tatsächlich neun Kuben benötigen. Somit scheint die Zahl 9 vielmehr eine zahlentheoretische Kuriosität als wirklich charakteristisch für das Problem zu sein. Die tiefere und wesentlich schwieriger zu beantwortende Frage ist also, ob es eine kleinste Zahl $G(k)$ gibt, sodass sich alle *hinreichend großen* natürlichen Zahlen als Summe von $G(k)$ k-ten Potenzen schreiben lassen. Offenbar ist stets $G(k) \leq g(k)$. Mit der Endlichkeit von $g(k)$ folgt also auch die von $G(k)$. Durch Dickson weiß man $3 \leq G(3) \leq 8$ und es wird angenommen, dass $G(3) = 5$ ist und dass $G(k)$ für wachsendes k „wesentlich kleiner" ist als $g(k)$.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns ausschließlich mit dem Fall $k \geq 3$. Der Fall $k = 2$ kann mit Hilfe elementarer Mittel gelöst werden, er führt zum berühmten Vier-Quadrate-Satz von Joseph-Louis Lagrange:

Theorem 1.0.1 (Lagrange)**.** *Für jede nicht-negative ganze Zahl n existieren natürliche Zahlen $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{N}_0$, sodass*

$$n = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2.$$

Mit anderen Worten: es ist $g(2) \leq 4$. Die Tatsache, dass keine natürliche Zahl der Form $n = 8m + 7$ als Summe dreier Quadratzahlen geschrieben werden kann, zeigt schließlich $g(2) = G(2) = 4$.
Um die höheren Fälle klären zu können, bedarf es wesentlich komplexerer Methoden. Mit einer dieser Methoden, der sogenannten *Zirkelmethode* von G. H. Hardy und J. E. Littlewood, wollen wir uns in dieser Arbeit ausführlich beschäftigen. Die grundlegende Idee der Zirkelmethode ist die Umformulierung additiver Probleme in die Sprache der komplexen Analysis. Sei $L \subset \mathbb{N}_0$ wieder eine nicht-leere Teilmenge, $s \in \mathbb{N}$ fixiert und $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Es bezeichne $r_s^L(n)$ die Anzahl der Darstellungsmöglichkeiten[2] von n als Summe von s Elementen aus L und $F_L(z) = \sum_{m \in L} z^m$ die erzeugende Funktion der charakteristischen Funktion von L. Dann gilt für die erzeugende Funktion der $r_s^L(n)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_s^L(n) z^n = \left(\sum_{m \in L} z^m \right)^s = F_L^s(z).$$

Offenbar sind beide Seiten holomorphe Funktionen in $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, daher lässt sich die Cauchysche Integralformel für die Berechnung der Koeffizienten $r_s^L(n)$ anwenden:

$$r_s^L(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{F_L^s(z)}{z^{n+1}} \mathrm{d}z,$$

wenn Γ eine einfach in mathematisch positiver Richtung durchlaufene, geschlossene Kreislinie innerhalb $\mathbb{E}$ mit Mittelpunkt $z = 0$ bezeichnet. Die Idee der Zirkelmethode ergibt sich aus der Beobachtung, dass oberes Integral vor allem durch den Wert auf gewissen Teilintervallen gegeben ist. Wir nennen diese maßgeblichen Intervalle die *major arcs*, und die restlichen Intervalle die *minor arcs*. Wir zerlegen die Kreislinie Γ also in disjunkte, zusammenhängende Teile, eben jenen minor und major arcs, und untersuchen anschließend das Verhalten der Funktion $F_L^s(z)$ auf diesen Teilbögen. In dem für uns interessanten Fall ist L die Menge der Kubikzahlen, der vierten Potenzen usw. Es stellt sich heraus, dass $F_L^s(z)$ auf den minor arcs zu vernachlässigen ist und auf den major arcs durch eine elementare Funktion hinreichend gut approximiert werden kann, was eine

[2] die Reihenfolge der Summation spiele eine Rolle

Berechnung des Integrals bis auf einen hinreichend kleinen Fehler ermöglicht.
Wir bezeichnen im Folgenden $\tilde{r}_{k,s}^{\mathbb{N}_0}(n)$ als die Anzahl der Darstellungsmöglichkeiten einer natürlichen Zahl n als Summe nicht-negativer k-ter Potenzen. Wir werden folgende *schwache* Version des Waringschen Problemes beweisen, die von David HILBERT zuerst gezeigt wurde:

Theorem 1.0.2 (Hilbert, 1909)**.** *Zu jedem $k \geq 3$ gibt es ein $g(k)$, sodass $\tilde{r}_{k,s}^{\mathbb{N}_0}(n) > 0$ für alle $n \geq 1$ und alle $s \geq g(k)$.*

Dies ist insofern eine schwache Verallgemeinerung des Vier-Quadrate-Satzes, als dass wir keine obere Schranke für den Wert $g(k)$ ermitteln. Obgleich dies getan werden kann, würde dies den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Nichtsdestotrotz können wir für hinreichend große s etwas expliziteres sagen. Bezeichnen wir in analoger Weise zu oben $\tilde{r}_{k,s}^{\mathbb{N}}(n)$ als die Anzahl aller Möglichkeiten, n als die Summe von s echt positiven k-ten Potenzen zu schreiben, so gilt

Theorem 1.0.3 (Hardy, Littlewood, 1920)**.** *Zu jedem $k \geq 3$ gibt es ein $G_1(k)$, sodass*

$$r_{k,s}(n) := \sum_{\ell=1}^{s} \binom{s}{\ell} 2^{\ell} \tilde{r}_{k,\ell}^{\mathbb{N}}(n) \sim \frac{(2\Gamma(1+\frac{1}{k}))^s}{\Gamma(\frac{s}{k})} \; n^{\frac{s}{k}-1} \; \mathcal{S}_s(n)$$

für alle $s \geq G_1(k)$.

Hierbei bezeichnet $\mathcal{S}_s(n)$ die sogenannte *singuläre Reihe*. Im Vergleich zu Theorem 1.0.2 schafft Theorem 1.0.3 von Hardy und Littlewood die Grundlage für mögliche Aussagen über obere Schranken von $g(k)$.

Diese Arbeit ist auf folgende Art und Weise strukturiert. In Kapitel 2 wiederholen wir einige mathematische Grundlagen, die für diese Arbeit unverzichtbar sind. In Kapitel 3 nehmen wir uns die disjunkte Zerlegung der Kreislinie in minor und major arcs vor, wobei wir uns hauptsächlich an [Apo] und [HaRa] halten. In Kapitel 4 wenden wir den erarbeiteten Ansatz auf das Waringsche Problem an und werden die Theoreme 1.0.2 und 1.0.3 beweisen. Dabei widmen wir uns zuerst der Untersuchung der singulären Reihe $\mathcal{S}_s$. Anschließend untersuchen wir das Verhalten der Funktion $\theta_k(z) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^{n^k}$ auf minor und major arcs, um mit der Zirkelmethode Aussagen über die Zahlen $r_{k,s}(n)$ zu bekommen. Wir orientieren uns hier an den Aufzeichnungen von Hardy und Littlewood, vergleiche [HaLi].

2 Grundlagen

In diesem Kapitel zitieren wir ohne Beweis einige wichtige Grundlagen, die wir zur Erarbeitung dieser Arbeit benötigen.

Satz 2.0.1 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)**.** *Sei $\mathcal{H}$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Skalarprodukt. Dann gilt für alle $x, y \in \mathcal{H}$:*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle .$$

Man vergleiche auch [AmEs1], S. 167.

Satz 2.0.2 (Abelsch partielle Summation, Abelsche Ungleichung)**.** *Es seien komplexe Zahlen $a_1, ..., a_n$ resp. $b_1, ..., b_n$ gegeben und $A_k := a_1 + a_2 + \cdots + a_k$. Dann gilt*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j b_j = A_n b_n + \sum_{j=1}^{n-1} A_j (b_j - b_{j+1}).$$

Sind die Zahlen $b_1, ..., b_n$ reell mit der Eigenschaft $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq 0$, so gilt

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_j b_j \right| \leq b_1 \max_{1 \leq j \leq n} |A_j|.$$

Man vergleiche auch [Abel], S. 314.

Satz 2.0.3 (Standardabschätzung für Integrale)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig. Sei weiter C eine stückweise glatte Kurve, welche in D enthalten ist. Dann gilt*

$$\left| \int_C f(z) \mathrm{d}z \right| \leq \ell(C) \sup_{z \in C} |f(z)|.$$

Hierbei bezeichnet $\ell(C)$ die Länge der Kurve C.

Die Länge einer stückweise glatten Kurve $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$ mit Parametrisierungen $\gamma_k(t)$, $k = 1, ..., n$ ist mit $t \in [a_{k-1}, a_k]$ gegeben durch

$$\ell(C) = \sum_{k=1}^{n} \int_{a_{k-1}}^{a_k} |\gamma_k'(t)| \mathrm{d}t.$$

Satz 2.0.4 (Approximationssatz von Weierstraß). *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge auf U holomorpher Funktionen, welche punktweise gegen eine Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ konvergiere. Die Konvergenz sei gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von U. Dann ist f holomorph auf U und $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert kompakt gegen f'.*

Satz 2.0.5 (Leibnizsche Regel). *Seien $a < b$ reelle Zahlen und sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Sei weiter $f_{\mathbb{C}} : [a, b] \times U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die für jedes feste $t \in [a, b]$ stetig komplex nach $z \in U$ differenzierbar ist. Dann ist die Funktion*

$$g_{\mathbb{C}}(z) := \int_a^b f_{\mathbb{C}}(t, z) \mathrm{d}t$$

holomorph auf U, und es gilt

$$g_{\mathbb{C}}'(z) = \int_a^b \frac{\partial f_{\mathbb{C}}(t, z)}{\partial z} \mathrm{d}t.$$

Satz 2.0.6 (Residuensatz). *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet und seien $z_1, ..., z_k$ endlich viele, paarweise verschiedene Punkte in D. Sei weiter $f : D\backslash\{z_1, ..., z_n\} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und C eine geschlossene, stückweise glatte Kurve in $D \setminus \{z_1, ..., z_k\}$. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) \mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{k} \chi(C; z_j) \mathrm{Res}_{z=z_j}(f),$$

wobei $\chi(C; z_j)$ die Umlaufzahl der Kurve C des Punktes z_j darstellt.

Die Umlaufzahl einer stückweise glatten, geschlossenen Kurve C um den Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ ist üblicherweise definiert durch

$$\chi(C; z_j) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z - z_j}.$$

Man vergleiche hierfür auch Kapitel 4 bzw. 7 in [Kas1].

Definition 2.0.7 (Holomorphe Funktionen mehrerer Variablen)**.** *Es sei* $U \subseteq \mathbb{C}^n$ *eine offene Teilmenge. Eine Funktion*

$$f : U \longrightarrow \mathbb{C}$$

heißt holomorph, falls sie in jeder Variablen holomorph und zudem stetig ist.

Nach einem Satz von Hartogs kann die Bedingung der Stetigkeit weggelassen werden. Dies ist ein tiefes Resultat und da in unseren Betrachtungen Stetigkeit schnell eingesehen werden kann, wird es in dieser Arbeit nicht angewendet.

Satz 2.0.8 (Identitätssatz für holomorphe Funktionen)**.** *Sei* $U \subseteq \mathbb{C}^n$ *eine offene und zusammenhängende Teilmenge. Seien* $f, g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ *zwei holomorphe Funktionen und* $a \in U$*. Ist nun* $f \equiv g$ *in einer Umgebung von* a*, so gilt bereits* $f \equiv g$ *auf ganz* U*.*

Mehr über holomorphe Funktionen mehrerer Veränderlicher findet sich in [Frei2] und [Schei].

Definition 2.0.9 (Gamma-Funktion)**.** *Für komplexe Zahlen* $\mathrm{Re}\ s > 0$ *definieren wir die Gamma-Funktion durch*

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$$

Sie lässt sich zu einer in ganz $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}_0$ *holomorphen Funktion mit einfachen Polen in* $s \in -\mathbb{N}_0$ *fortsetzen und genügt dort der Funktionalgleichung*

$$s\Gamma(s) = \Gamma(s+1).$$

Satz 2.0.10 (Ergänzungssatz)**.** *Es gilt für alle* $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$*:*

$$\Gamma(1-s)\Gamma(s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}.$$

In [FrBu], Kapitel 4 und [Kas2], Kapitel 2 wird ausführlich auf die Gamma-Funktion und weiterer ihrer Eigenschaften eingegangen.

Satz 2.0.11 (Mellinscher Umkehrsatz)**.** *Es seien* $a < b$ *reelle Zahlen und* $h(s)$ *eine im Streifen* $a < \mathrm{Re}\ s < b$ *holomorphe Funktion, die auf jeder Geraden* $\mathrm{Re}\ s = c \in (a, b)$

schnell abfällt, sodass ihr Integral auf dieser Geraden absolut konvergiert. Ist dann

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} h(s)x^{-s}\mathrm{d}s,$$

für alle $x > 0$, so gilt

$$h(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}\mathrm{d}x \quad \textit{für alle } a < \mathrm{Re}\ s < b.$$

Man vergleiche auch [Tit], Kapitel 1, S. 46. Die dortige Version ist etwas stärker, jedoch reicht die oben zitierte für unsere Zwecke aus.

Satz 2.0.12 (Satz über die majorisierte Konvergenz)**.** *Es sei $(E, ||.||)$ ein Banachraum, (X, μ, E), $(X, \mu, \mathbb{R})$ zwei Maßräume und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}^1(X, \mu, E)$, welche μ-fast überall gegen ein $f : X \longrightarrow E$ konvergiert. Es gebe $g \in \mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{R})$ mit $g \geq 0$, sodass $||f|| \leq g$ μ-fast überall für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu, E)$ und es gilt*

$$\int_X f\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu.$$

Vergleiche [AmEs2], S. 108. Für den zugehörigen Banachraum wählen wir in unserem Fall $E = \mathbb{C}$.

Satz 2.0.13 (Fourierentwicklung)**.** *Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine 1-periodische, stückweise glatte Funktion. Dann lässt sie sich in eine Fourierreihe der Form*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu \cos(2\pi\nu x) + b_\nu \sin(2\pi\nu x))$$

entwickeln, wobei für die Koeffizienten

$$a_\nu = 2\int_0^1 f(x)\cos(2\pi\nu x)\mathrm{d}x \qquad \textit{und} \qquad b_\nu = 2\int_0^1 f(x)\sin(2\pi\nu x)\mathrm{d}x$$

gilt. Die Fourierreihe stellt die Funktion in allen Punkten dar, in denen die Funktion stetig ist. In ihren Sprungstellen hat sie gerade den Wert des arithmetischen Mittels der beidseitigen Grenzwerte.

Genaueres zu Fourierreihen ist in [Frei1] Kapitel 4 nachzulesen.

3 Die Farey-Zerlegung des Kreises

In diesem Kapitel zerlegen wir die Kreislinie Γ_n mit der Parametrisierung $\gamma : (0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_n(t) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) e^{2\pi i t}$ disjunkt in gewisse Teilmengen, den major und minor arcs. Dies geschieht über einen intuitiven Ansatz mit Hilfe der *Farey-Brüche*. Die Idee ist, „möglichst einfache" rationale Zahlen $0 = r_1 < r_2 < r_3 < \cdots < r_{N-1} < r_N = 1$ für eine disjunkte Zerlegung der Form

$$\Gamma_n = \bigcup_{i=1}^{N} \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right) e^{2\pi i t} \middle| t \in (r_i - \delta_i, r_i + \varepsilon_i] \right\}$$

zu identifizieren, wobei die δ_i und ε_i geeignete nicht negative rationale Zahlen darstellen. Die r_i lassen sich als „Zentren" der Zerlegungsintervalle auffassen. Der Term *möglichst einfach* wird in unserem Fall auf Einhaltung der naheliegenden Bedingungen

- $r_i = \frac{a_i}{b_i}$ ist vollständig gekürzt
- b_i überschreitet nicht eine vorgegebene Größe

festgelegt. Wir richten uns in diesem Kapitel maßgeblich nach [Apo], Kapitel 5.4. und [HaRa].

3.1 Farey-Brüche

Anmerkung: In diesem Abschnitt sind a, b, c, d, h, k stets ganze positive Zahlen.

Bei der Zirkelmethode spielt die Menge der vollständig gekürzten Brüche im Intervall $[0, 1]$ eine entscheidende Rolle. Diese werden auch als *Farey-Brüche* bezeichnet. Wir werden in diesem Abschnitt ihre Eigenschaften genauer studieren.

Definition 3.1.1 (Farey-Brüche)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Die Menge der Farey-Brüche der Ordnung n ist definiert durch die Menge aller vollständig gekürzten Brüche im Intervall $[0, 1]$, deren Nenner den Wert n nicht übersteigt. Wir wollen sie mit F_n bezeichnen.*

Beispiel 3.1.2. *Die ersten Glieder der Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lassen sich relativ leicht bestimmen, wir haben zum Beispiel*

$$\begin{aligned}
F_1 &= \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\}, \\
F_2 &= \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right\}, \\
F_3 &= \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right\}, \\
F_4 &= \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right\}, \\
F_5 &= \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\right\}, \\
F_6 &= \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}\right\}, \\
F_7 &= \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}\right\}.
\end{aligned}$$

Zur besseren Übersicht haben wir die Elemente der Größe nach sortiert. Die dadurch festgelegte Reihenfolge wird später noch eine wichtige Rolle spielen.

Definition 3.1.3. *Zwei Elemente $x, y \in F_n$ mit $x < y$ bezeichnen wir als aufeinander-*

folgend, wenn für alle $z \in F_n$ gilt:

$$x \leq z \leq y \implies x = z \quad \text{oder} \quad y = z.$$

Da alle vollständig gekürzten Brüche in F_n den Nenner n lediglich nicht überschreiten dürfen, ist unmittelbar klar, dass wir eine Inklusionskette von Mengen erhalten:

$$F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset F_4 \subset \cdots.$$

Demnach erhalten wir F_{n+1}, indem wir geeignete Brüche der Menge F_n hinzufügen. Dies geschieht nach dem folgenden Prinzip: sind die Brüche $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ aufeinanderfolgende Elemente aus F_n, werden jedoch in F_{n+1} durch einen neu hinzu kommenden Bruch $\frac{h}{k}$ separiert, d.h.

$$\frac{a}{b} < \frac{h}{k} < \frac{c}{d},$$

so gilt bereits

$$\frac{h}{k} = \frac{a+c}{b+d}$$

und kein weiterer Bruch aus F_{n+1} separiert $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ im obigen Sinne. Diesen neuen Bruch $\frac{h}{k}$ bezeichnen wir auch als *Mediant* von $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$. Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis dieses Verfahrens. Hierfür beginnen wir mit der Wohldefiniertheit des Medianten.

Proposition 3.1.4. *Für die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ gelte $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Dann liegt ihr Mediant zwischen ihnen, d.h.*

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Beweis. Aus der Bedingung $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ folgt unmittelbar $ad < bc$. Damit erhalten wir

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{b(b+d)} > 0$$

und

$$\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{bc - ad}{d(b+d)} > 0.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Das nun folgende Beispiel soll die oben geschilderte Methode zur Bestimmung von F_{n+1} aus F_n illustrieren.

Beispiel 3.1.5. *Wir wollen aus der Menge* $F_4 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\}$ *die Menge* F_5 *konstruieren. Hierfür betrachten wir alle aufeinanderfolgenden Brüche, deren Nenner sich zu* $n = 5$ *aufaddieren. Diese sind* $\frac{0}{1}, \frac{1}{4}$ *und* $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ *und* $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ *und* $\frac{3}{4}, \frac{1}{1}$. *Die in* F_4 *neu hinzuzufügenden Brüche berechnen wir nun durch die jeweiligen Medianten:*

$$\frac{0+1}{1+4} = \frac{1}{5}, \quad \frac{1+1}{3+2} = \frac{2}{5}, \quad \frac{1+2}{2+3} = \frac{3}{5} \quad \textit{und} \quad \frac{3+1}{4+1} = \frac{4}{5}.$$

Also haben wir $F_5 = F_4 \cup \{\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\} = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\}$.

Wie wir in Beispiel 3.1.2 erkennen, sind die Brüche $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ aufeinanderfolgend in F_n für $n = 4, 5, 6$ aber nicht mehr für $n = 7$. Dies ist eine Kosequenz folgender Proposition.

Proposition 3.1.6. *Es sei* $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \leq 1$. *Ist* $bc - ad = 1$, *so sind* $\frac{a}{b}$ *und* $\frac{c}{d}$ *aufeinanderfolgende Brüche in* F_n *für die folgenden Werte für* n*:*

$$\max(b, d) \leq n \leq b + d - 1.$$

Setze $b = 3$ sowie $d = 4$, dann sind $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ aufeinanderfolgend in F_n für $\max(3, 4) = 4 \leq n \leq 3 + 4 - 1 = 6$.

Beweis. Nach dem euklidschen Algorithmus folgt aus der Bedingung $bc - ad = 1$, dass $(a, b) = (c, d) = 1$, also sind die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ vollständig gekürzt. Ist $\max(b, d) \leq n$, so gilt $b \leq n$ und $d \leq n$, also ergibt sich unmittelbar $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in F_n$. Es verbleibt zu zeigen, dass sie aufeinanderfolgend sind für $n \leq b + d - 1$. Angenommen sie sind es nicht, dann existiert ein vollständig gekürzter Bruch $\frac{h}{k}$ sodass

$$\frac{a}{b} < \frac{h}{k} < \frac{c}{d}. \tag{3.1.1}$$

Nun gilt aber

$$\begin{aligned} k &= (bc - ad)k = bck - adk \\ &= bck - bdh + bdh - adk \\ &= b(ck - dh) + d(bh - ak). \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Aus (3.1.1) folgt $ck - dh \geq 1$ und $bh - ak \geq 1$, demnach ist $k \geq b + d$. Haben wir aber $n \leq b + d - 1$, so ist dies ein Widerspruch und die Brüche müssen aufeinanderfolgend gewesen sein. □

Proposition 3.1.7. *Es sei $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{h}{k} < \frac{c}{d} \leq 1$, wobei $\frac{h}{k}$ den Medianten von $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ bezeichne. Gilt außerdem $bc - ad = 1$, so erfüllen diese Brüche die unimodularen Relationen*

$$bh - ak = 1 \quad \text{und} \quad ck - dh = 1.$$

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $bh - ak \geq 1$ resp. $ck - dh \geq 1$. Mit Hilfe von (3.1.2) folgern wir $k = b + d$ genau dann, wenn $bh - ak = ck - dh = 1$. □

Der folgende Satz zeigt, wie wir F_{n+1} vollständig aus F_n konstruieren können.

Satz 3.1.8. *Die Menge F_{n+1} enthält die Menge F_n. Jeder Bruch aus F_{n+1}, der nicht in F_n enthalten ist, ist Mediant zweier aufeinanderfolgender Brüche aus F_n. Sind ferner $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ aufeinanderfolgend in F_k für beliebiges $k \in \mathbb{N}$, so erfüllen sie die unimodulare Relation*

$$bc - ad = 1.$$

Beweis. Wir beweisen den Satz per Induktion. Für $n = 1$ haben wir $F_1 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\}$. Dabei sind die Brüche $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{1}$ aufeinanderfolgend und erfüllen offensichtlich die gewünschte unimodulare Relation. Wir erhalten F_2 aus F_1, indem wir $\frac{1}{2}$, also den Medianten von $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{1}$, zu F_1 hinzufügen.

Wir nehmen an, die Behauptung sei für ein fest vorgegebenes $n \in \mathbb{N}$ gezeigt. Seien $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ aufeinanderfolgende Brüche aus F_n, welche dann folglich die unimodulare Relation $bc - ad = 1$ erfüllen. Nach Proposition 3.1.6 sind sie aufeinanderfolgend in F_m für alle m mit

$$\max(b, d) \leq m \leq b + d - 1.$$

Bestimme ihren Medianten $\frac{h}{k}$ durch $h = a + c$ und $k = b + d$, also als $\frac{h}{k} = \frac{a+c}{b+d}$. Nach Proposition 3.1.7 haben wir $bh - ak = 1$ sowie $ck - dh = 1$, folglich sind h und k teilerfremd und der Bruch $\frac{h}{k}$ ist vollständig gekürzt. Da $k = b + d$ sind die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ nicht aufeinanderfolgend in F_k. Aber die von uns neu generierten Paare $\frac{a}{b} < \frac{h}{k}$ bzw. $\frac{h}{k} < \frac{c}{d}$ sind nach Proposition 3.1.6 aufeinanderfolgend in F_k, da $k = \max(b, k)$ und $k = \max(d, k)$ und $k \leq k + b - 1$ resp. $k \leq k + d - 1$ gilt. Sie erfüllen weiterhin jeweils die bereits oben erwähnte unimodulare Relation. Ergänzen wir also F_n zu F_{n+1},[1] so muss jeder hinzugenommene Bruch der Mediant zweier in F_n aufeinderfolgender Brüche sein und die dabei neu entstandenen Paare erfüllen jeweils die unimodulare Relation. Da aber F_n der Voraussetzung zufolge diese Eigenschaften besitzt, müssen sie auch auf F_{n+1} zutreffen. $\square$

[1]Man denke sich in diesem Fall $k = n + 1$.

3.2 Major und minor arcs

In diesem Abschnitt wollen wir die Eigenschaften der Farey-Brüche nutzen, um eine disjunkte Zerlegung der Kreislinie Γ_n vorzunehmen. Zur Bewahrung der Einfachheit fokussieren wir uns dabei auf eine Zerlegung des Intervalls $(0,1]$, welche wir dann mittels des Homöomorphismus[2]

$$h : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \Gamma_n$$
$$x \longmapsto \left(1 - \frac{1}{n}\right) e^{2\pi i x}$$

in die gewünschte Zerlegung der Kreislinie überführen.

Definition 3.2.1. *Wir definieren $\mathcal{F}_n$ als die Menge aller Tupel nicht negativer teilerfremder Zahlen p und q, sodass $\frac{p}{q} \in F_n \setminus \{1\}$.*[3] *Außerdem setzen wir $\mathcal{F}_\infty$ als*

$$\mathcal{F}_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n.$$

Lemma 3.2.2. *Seien $\frac{p''}{q''} < \frac{p}{q} < \frac{p'}{q'}$ aufeinanderfolgende Farey-Brüche der Ordnung m. Sei ferner $j_{p,q}^{(m)}$ das zu $\frac{p}{q}$ gehörige Intervall*

$$j_{p,q}^{(m)} = \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q(q+q'')}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q(q+q')}\right].$$

Definieren wir außerdem

$$j_{0,1}^{(m)} = \left(0, \frac{1}{m+1}\right] \qquad \text{und} \qquad j_{1,1}^{(m)} = \left(1 - \frac{1}{m+1}, 1\right],$$

dann gelten folgende Aussagen:

(i) $$\bigsqcup_{(p,q)\in\mathcal{F}_m \cup \{(1,1)\}} j_{p,q}^{(m)} = (0,1].$$

[2] Wir identifizieren hierbei das Intervall $(0,1]$ mit $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und statten beide Räume mit der Standardtopologie aus.

[3] Insbesondere gilt stets $q > p \geq 0$ und im Fall $p = 0$ genau $q = 1$.

(ii) Für die Längen L_1, L_2 der Teilintervalle

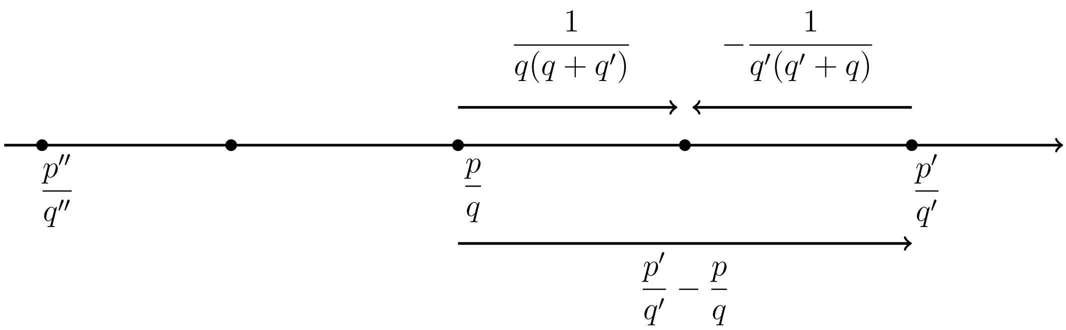
$$I_1 = \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q(q+q'')}, \frac{p}{q}\right] \qquad \textit{und} \qquad I_2 = \left(\frac{p}{q}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q(q+q')}\right]$$

gilt

$$\frac{1}{2mq} < L_i < \frac{1}{mq} \qquad \textit{für} \quad i = 1, 2.$$

Beweis. Nach Satz 3.1.8 gilt die unimodulare Relation $p'q - pq' = 1$, wir erhalten somit

$$\frac{1}{q(q+q')} + \frac{1}{q'(q'+q)} = \frac{1}{qq'} = \frac{p'q - pq'}{qq'} = \frac{p'}{q'} - \frac{p}{q}.$$



Damit folgt (i). Für (ii) betrachten wir nur I_1, da der Beweis für I_2 genauso funktioniert. Weil $q < m$ oder $q' < m$,[4] folgt sofort

$$\frac{1}{q(q+q')} > \frac{1}{2mq}.$$

Des Weiteren folgt $q + q' > m$ aus Proposition 3.1.6, da sonst

$$\frac{p}{q} < \frac{p+p'}{q+q'} < \frac{p'}{q'} \qquad \text{und} \qquad \frac{p+p'}{q+q'} \in F_m,$$

ein Widerspruch zur Voraussetzung. Folglich ist

$$\frac{1}{q(q+q')} < \frac{1}{mq}.$$

□

[4] Wären beide gleich m, so folgt aus der unimodularen Relation bereits $m = 1$.

Bemerkung 3.2.3. *Das Weglassen von* $(1,1)$ *in Definition* 3.2.1 *motiviert sich daraus, dass wir die Intervalle* $j_{0,1}^{(m)}$ *und* $j_{1,1}^{(m)}$ *von nun an verkleben und als einen geschlossenen Bogen des Kreises betrachten.*

Definition 3.2.4. *Es seien* $k \geq 3$ *und* $n > 1$ *natürliche Zahlen und* $N = [n^{1-\frac{1}{k}}]$. *Wir definieren dann für* $(p,q) \in \mathcal{F}_N \setminus \{(0,1)\}$

$$\xi_{p,q} = \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right) e^{2\pi i x} \mid x \in j_{p,q}^{(N)} \right\}$$

und außerdem

$$\xi_{0,1} = \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right) e^{2\pi i x} \mid x \in \left(-\frac{1}{N+1}, \frac{1}{N+1} \right] \right\}.$$

Satz 3.2.5. *Die Mengen* $(\xi_{p,q})_{(p,q)\in\mathcal{F}_N}$ *bilden eine disjunkte Zerlegung von* Γ_n. *Jeder beliebige Wert* $x \in \xi_{p,q}$ *kann in der Form*

$$x = \left(1 - \frac{1}{n}\right) e^{\frac{2\pi i p}{q} + i\alpha}$$

mit einem $|\alpha| < \dfrac{2\pi}{qN}$ *geschrieben werden.*

Beweis. Folgt mit Lemma 3.2.2. □

Definition 3.2.6. *Wir bezeichnen* $\xi_{p,q}$ *als einen* ***major arc****, falls* $q \leq n^a$ *und als einen* ***minor arc****, falls* $n^a < q \leq n^{1-a}$. *Wir definieren außerdem*

$$\mathfrak{M}_n = \bigsqcup_{p,q} \xi_{p,q}$$

als die disjunkte Vereinigung der major arcs bezüglich n *und analog* $\mathfrak{m}_n$ *als die disjunkte Vereinigung der minor arcs.*

4 Anwendung auf das Waringsche Problem

4.1 Notationen

In diesem Kapitel bezeichnen k, s, p und q stets nicht negative ganze Zahlen, für welche wir, falls nicht ausdrücklich anders gefordert, $k > 2$, $s > 0$, $0 \leq p < q$ mit $(p, q) = 1$ und $p > 0$ wenn $q > 1$ festlegen. Ferner wählen wir die Bezeichnungen

$$K = 2^{k-1}, \qquad \kappa = 1 - \frac{1}{K}, \qquad a = \frac{1}{k}, \qquad b = \frac{1}{k-1},$$

da diese häufiger in Gebrauch sein werden. Wie in der Zahlentheorie üblich verwenden auch wir die Kurzschreibweisen $e(x) = e^{2\pi ix}$ resp. $e_q(x) = e\left(\frac{x}{q}\right)$. Zu jederzeit bezeichnen wir mit $\log(z)$ den Hauptzweig der komplexen Logarithmusfunktion.

Wir werden die klassische O-Notation von Landau verwenden, d.h. mit $f(x) = O(g(x))$ meinen wir, dass es ein $C > 0$ gibt, sodass für alle hinreichend großen x

$$|f(x)| \leq C|g(x)|$$

gilt. Schreiben wir außerdem

$$f(x) = O(g_1(x)) = O(g_2(x)) = \cdots = O(g_n(x)),$$

so meinen wir $f(x) = O(g_i(x))$ für $i = 1, ..., n$. Ist die betrachtete Funktion f aus dem Kontext klar, verwenden wir hierfür gelegentlich auch die Kurzschreibweise

$$O(g_1(x)) = O(g_2(x)) = \cdots = O(g_n(x)).$$

Falls nicht anders gefordert, setzen wir

$$f(x) = O(a(x)b(x)^{\varepsilon}) \iff \forall \varepsilon > 0 : f(x) = O(a(x)b(x)^{\varepsilon}).$$

Beispielsweise ist dann $\log x = O(x^{\varepsilon})$.

4.2 Die Funktion $\theta_k(z)$ und ihre elementaren Eigenschaften

Ziel dieses Abschnitts ist die Definition der Funktion $\theta_k(z)$, mit deren Hilfe wir eine Verbindung zwischen dem behandelten additiven Zahlenproblem und der Funktionentheorie und ihren Techniken aufbauen. Zum Schluss werden wir anhand dieser Verbindung noch einmal eine kurze Motivation zur später angewendeten Zirkelmethode geben.

Definition 4.2.1. *Für alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{E}$ definieren wir $\theta_k(z)$ durch*

$$\theta_k(z) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^{n^k} = 1 + 2z + 2z^{2^k} + 2z^{3^k} + \cdots .$$

Proposition 4.2.2. *$\theta_k(z)$ ist eine in ganz $\mathbb{E}$ holomorphe Funktion.*

Beweis. Es gilt für alle $|z| < 1$

$$|\theta_k(z)| \leq 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |z|^{n^k} \leq 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |z|^n = 1 + \frac{2|z|}{1-|z|} < \infty,$$

folglich konvergiert die Potenzreihe nach dem Majorantenkriterium absolut und gleichmäßig auf kompakten Teilmengen der Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$ und $\theta_k(z)$ stellt dort nach dem Satz von Weierstraß eine holomorphe Funktion dar. $\square$

Wir hatten bereits in der Einleitung $\tilde{r}_{k,s}^{\mathbb{N}_0}(n)$ als die Anzahl der Möglichkeiten definiert, eine ganze Zahl $n \geq 1$ als Summe von s nicht-negativen k-ten Potenzen zu schreiben. Ob die Reihenfolge der Summanden eine Rolle spielen soll oder nicht, hat auf unsere Problemstellung keinen Einfluss. Daher halten wir uns aus Gründen der Einfachheit daran, dass sie eine Rolle spielen solle. In folgender Definition werden wir $\tilde{r}_{k,s}^{\mathbb{N}_0}(n)$ formal festlegen und zwei weitere mit $\tilde{r}_{k,s}^{\mathbb{N}_0}(n)$ verwandte Größen einführen.

Definition 4.2.3. *Für Zahlen $k, s, n \geq 1$ definieren wir*

$$\tilde{r}_{k,s}^{\mathbb{A}}(n) := \#\{(n_1, ..., n_s) \in \mathbb{A}^s \mid n_1^k + n_2^k + \cdots + n_s^k = n\}$$

mit $\mathbb{A} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{N}_0, \mathbb{N}\}$. Man beachte, dass die Zahl k im Falle $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$ zusätzlich als gerade vorausgesetzt sein soll.

Unser Ziel ist es das Waringsche Problem mit Hilfe der eben definierten Funktion $\theta_k(z)$ in einen analytischen Kontext zu setzen. Dies gelingt uns mit dem folgenden Satz.

Satz 4.2.4. *Definieren wir $r_{k,s}(n)$ als die erzeugenden Koeffizienten der Funktion $\theta_k^s(z)$, also*

$$\theta_k^s(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_{k,s}(n) z^n,$$

so gilt für alle $n > 0$:

(i) $r_{k,s}(n) = \tilde{r}_{k,s}^{\mathbb{Z}}(n)$ falls k gerade ist,

(ii) $r_{k,s}(n) = \sum_{\ell=1}^{s} \binom{s}{\ell} 2^\ell \tilde{r}_{k,\ell}^{\mathbb{N}}(n)$ für alle $k \geq 1$.

(iii) Sind $s_1 > s_2$ natürliche Zahlen, so folgt $r_{k,s_1}(n) \geq r_{k,s_2}(n)$.

Beweis. Wir zeigen zuerst (i). Der Beweis erfolgt über einen einfachen Koeffizientenvergleich. Ist k gerade, so gilt

$$\begin{aligned}
\theta_k^s(z) = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{n^k} \right)^s &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_s=-\infty}^{\infty} z^{n_1^k+\cdots+n_s^k} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(n_1,\dots,n_s)\in\mathbb{Z}^s : n_1^k+\cdots+n_s^k = n} z^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{r}_{k,s}^{\mathbb{Z}}(n) z^n.
\end{aligned}$$

Der Beweis für (ii) wird fast analog geführt. Wir nutzen wieder das mehrfache Cauchy-Produkt und machen anschließend einen Koeffizientenvergleich.

$$\begin{aligned}
\theta_k^s(z) = \left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^{n^k} \right)^s &= \sum_{\ell=0}^{s} \binom{s}{\ell} 2^\ell \left(\sum_{n=1}^{\infty} z^{n^k} \right)^\ell \\
&= 1 + \sum_{\ell=1}^{s} \binom{s}{\ell} 2^\ell \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{r}_{k,\ell}^{\mathbb{N}}(n) z^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\ell=1}^{s} \binom{s}{\ell} 2^\ell \tilde{r}_{k,\ell}^{\mathbb{N}}(n) \right) z^n.
\end{aligned}$$

Für (iii) betrachten wir die erzeugende Funktion der Folge $a_n = r_{k,s_1}(n) - r_{k,s_2}(n)$, diese ist

$$\sum_{n=1}^{\infty}(r_{k,s_1}(n)-r_{k,s_2}(n))z^n = \theta_k^{s_2}(z)(\theta_k^{s_1-s_2}(z)-1) = \left(1+\sum_{n=1}^{\infty} r_{k,s_2}(n)z^n\right)\cdot\sum_{n=1}^{\infty} r_{k,s_1-s_2}(n)z^n$$

Alle Koeffizienten der rechten Seite sind nicht negativ, was unter der Cauchy-Faltung bestehen bleibt. Es folgt $r_{k,s_1}(n) - r_{k,s_2}(n) \geq 0$. □

Korollar 4.2.5. *Gibt es für jede Zahl $k \geq 3$ eine hinreichend große ganze Zahl $g(k)$, sodass $r_{k,s}(n) > 0$ für alle $n \geq 1$ und alle $s \geq g(k)$, so gilt bereits $r_{k,s}^{\mathbb{N}_0}(n) > 0$ für alle $n \geq 1$ und $s \geq g(k)$. Insbesondere folgt Theorem 1.0.2.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass aus $r_{k,s}(n) > 0$ bereits $\tilde{r}_{k,s}^{\mathbb{N}_0}(n) > 0$ folgt. Ist $r_{k,s}(n) > 0$, so folgt mit Satz 4.2.4 bereits

$$\sum_{\ell=1}^{s} \binom{s}{\ell} 2^{\ell} \tilde{r}_{k,\ell}^{\mathbb{N}}(n) > 0.$$

Da alle Summanden nicht-negativ sind, gibt es ein $1 \leq \ell \leq s$, sodass $\tilde{r}_{k,\ell}^{\mathbb{N}}(n) > 0$. Also existiert ein Tupel $(n_1, ..., n_\ell) \in \mathbb{N}^\ell$ welches $n_1^k + \cdots + n_\ell^k = n$ erfüllt. Dieses lässt sich zu dem Tupel $(n_1, ..., n_\ell, 0, ..., 0) \in \mathbb{N}_0^s$ ergänzen, welches offenbar immer noch gewünschte Eigenschaften erfüllt. Es folgt die Behauptung. □

Eines der Hauptresultate in Kapitel 4 ist es, dass die Koeffizienten $r_{k,s}(n)$ ab einem gewissen $g(k) < \infty$ für alle $n \geq 1$ positiv sind. Damit können wir mit dem eben gezeigten Korollar das Theorem 1.0.2 folgern.
Der folgende Satz ist eine einfache Anwendung funktionentheoretischer Resultate, schlägt aber die wichtige Brücke zwischen den Koeffizienten $r_{k,s}(n)$ und der Funktion $\theta_k(z)$.

Satz 4.2.6. *Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:*

$$r_{k,s}(n) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n} \frac{\theta_k^s(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z,$$

wobei die geschlossene Integrationskurve Γ_n den in mathematisch positiver Richtung einfach durchlaufenen Kreis mit Mittelpunkt $z_0 = 0$ und Radius $R = 1 - \frac{1}{n}$ bezeichne.

Beweis. Nach Proposition 4.2.2 ist $z \longmapsto \frac{\theta_k^s(z)}{z^{n+1}}$ eine in ganz $\mathbb{E} \setminus \{0\}$ holomorphe Funktion mit Laurententwicklung

$$\frac{\theta_k^s(z)}{z^{n+1}} = \frac{1}{z^{n+1}} + \frac{r_{k,s}(1)}{z^n} + \cdots + \frac{r_{k,s}(n)}{z} + r_{k,s}(n+1) + \cdots .$$

Da $\mathbb{E}$ ein Elementargebiet ist, folgt mit dem Residuensatz

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_n} \frac{\theta_k^s(z)}{z^{n+1}} \mathrm{d}z = \mathrm{Res}_{z=0} \frac{\theta_k^s(z)}{z^{n+1}} = r_{k,s}(n).$$

□

Diese Formel untermauert die Grundidee dieser Arbeit: auf der einen Seite befinden sich die Koeffizienten $r_{k,s}(n)$, auf der anderen Seite ein geschlossenes Kurvenintegral einer in $\mathbb{E} \setminus \{0\}$ holomorphen Funktion. Wir unterteilen den Integrationsweg des Integrals in major und minor arcs (*Zirkelmethode*) und untersuchen die Funktion $\theta_k^s(z)$ für alle Werte $s \geq 1$ auf diesen Teilbögen. Anschließend können wir eine Abschätzung des Integrals vornehmen und damit eine Abschätzung der Koeffizienten $r_{k,s}(n)$.

Folgende abschließende Bemerkung bezieht sich auf den besonderen Fall $k = 2$.

Bemerkung 4.2.7. *Die Funktion $\theta_k(z)$ ist im Fall $k = 2$ die sogenannte* JACOBI*sche Theta-Reihe*

$$\theta_2(z) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^{n^2} = 1 + 2z + 2z^4 + 2z^9 + 2z^{16} + \cdots .$$

Sie spielt in der Theorie der Modulformen eine zentrale Rolle, da sie unter der Transformation $\vartheta(\tau) := \theta_2(e(\tau/2))$ auf der oberen Halbebene $\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\ \ \tau > 0\}$ den Funktionalgleichungen

$$\vartheta(\tau + 2) = \vartheta(\tau) \qquad \textit{und} \qquad \vartheta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{i}}\vartheta(\tau)$$

genügt. Mit Hilfe dieser Eigenschaften kann das Waringsche Problem für den Fall $k = 2$ befriedigend gelöst werden, man vgl. [FrBu], Kapitel 7.

4.3 Die singuläre Reihe $\mathcal{S}_s(n)$

Wie wir bereits in der Einleitung gesehen haben, möchten wir für hineichend große s auf die asymptotische Äquivalenz

$$r_{k,s}(n) \sim \frac{(2\Gamma(1+a))^s}{\Gamma(sa)}\, n^{sa-1}\, \mathcal{S}_s(n)$$

hinarbeiten. In diesem Abschnitt werden wir die sogenannte singuläre Reihe $\mathcal{S}_s(n)$ definieren und einige ihrer Eigenschaften nachrechnen. Unter anderem muss sicher gestellt werden, dass $\mathcal{S}_s(n)$ für hinreichend große s für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert und eine reelle Zahl darstellt, da es sonst zu Schwierigkeiten mit der asymptotischen Äquivalenz und deren Folgerungen kommen könnte.

Definition 4.3.1. *Wir setzen für jede ganze Zahl m:*

$$S_{p,q,m} = \sum_{h=0}^{q-1} e_q(ph^k) \cos \frac{2mh\pi}{q}$$

und

$$S'_{p,q,m} = \sum_{h=0}^{q-1} e_q(ph^k) \sin \frac{2mh\pi}{q}.$$

Zusätzlich setzen wir $S_{p,q,0} := S_{p,q}$.

Über die leicht zu verifizierende Relation

$$S_{p,q,m} + iS'_{p,q,m} = \sum_{h=0}^{q-1} e_q(ph^k + mh)$$

werden die Summen $S_{p,q,m}$ und $S'_{p,q,m}$ für alle p, q gemeinsam mit einem *polynomiellen Exponentialausdruck*

$$\sum_{h=0}^{\mu} e(\varphi(h)), \qquad \varphi \in \mathbb{R}[X]$$

in Verbindung gebracht. Daher wird der Fokus unser Untersuchungen auf Ausdrücken solcher Art liegen.

Definition 4.3.2. *Als singuläre Reihe $\mathcal{S}$ definieren wir den folgenden Summenausdruck:*

$$\mathcal{S}_s(n) = \sum_{(p,q)\in\mathcal{F}_\infty} \left(\frac{S_{p,q}}{q}\right)^s e_q(-np).$$

Von grundlegender Bedeutung ist

Satz 4.3.3. *Für alle hinreichend großen Werte s ist die singuläre Reihe absolut konvergent und erfüllt $\mathcal{S}_s(n) > \frac{1}{2}$ für alle $n \geq 1$.*

Um diesen Satz zu zeigen, müssen wir genaueres über das Wachstum der $S_{p,q}$ für $q \longrightarrow \infty$ in Erfahrung bringen, da die kanonische Abschätzung $|S_{p,q}| \leq q$ nicht ausreichend ist. Beginnen werden wir mit der Definition einer zahlentheoretischen Funktion, die sich mit den multiplikativen Zerlegungsmöglichkeiten positiver ganzer Zahlen in kleinere positive ganze Zahlen befasst und uns bei der Abschätzung bestimmter Summen helfen wird.

Definition 4.3.4. *Seien $n, r > 0$ natürliche Zahlen, dann definieren wir*

$$\Pi_r(n) := \{(h_1, ..., h_r) \in \mathbb{N}^r \mid h_1 \cdots h_r = n\}$$

als die Anzahl der Möglichkeiten, n als Produkt r positiver ganzer Zahlen zu schreiben unter der Beachtung der Reihenfolge.

Beim Beweis der folgenden Proposition halten wir uns an die Ausführungen von E. Landau in [Lan], Seite 717.

Proposition 4.3.5. *Für fixes r gilt*

$$\Pi_r(n) = O(n^\varepsilon).$$

Beweis. Für $r = 1$ ist die Behauptung klar, für $r = 2$ wird sie wie folgt gezeigt. $\Pi_2(n)$ ist offenbar gerade die Teileranzahlfunktion $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$. Ist also $n = \prod_{i=1}^m p_i^{\nu_i}$ in seiner eindeutigen Primfaktorzerlegung gegeben, so folgt

$$\Pi_2(n) = \prod_{i=1}^{m} (\nu_i + 1).$$

Fixieren wir nun ein $\varepsilon > 0$, so ist der Ausdruck $\dfrac{\nu_i + 1}{p_i^{\nu_i \varepsilon}}$ durch eine Konstante $C_i(\varepsilon)$ beschränkt, da er für $\nu_i \longrightarrow \infty$ gegen 0 strebt. Für $p_i > 2^{\frac{1}{\varepsilon}}$ und jedes $\nu_i \geq 1$ ist er sogar ≤ 1, da dann

$$\frac{\nu_i + 1}{p_i^{\nu_i \varepsilon}} \leq \frac{\nu_i + 1}{2^{\nu_i}} \leq 1.$$

Also gilt für jedes $n \geq 1$:

$$\frac{\Pi_2(n)}{n^\varepsilon} \leq \prod_{p_i \leq 2^{\frac{1}{\varepsilon}}} \frac{\nu_i + 1}{p_i^{\nu_i \varepsilon}} \prod_{p_i > 2^{\frac{1}{\varepsilon}}} \frac{\nu_i + 1}{p_i^{\nu_i \varepsilon}} \leq \prod_{p_i \leq 2^{\frac{1}{\varepsilon}}} C_i(\varepsilon).$$

Letzteres ist eine nur von ε abhängige Konstante.

Die Proposition zeigen wir jetzt mit vollständiger Induktion. Die Behauptung sei also für ein festes $r \geq 2$ bereits bewiesen. Offenbar ist

$$\Pi_{r+1}(n) = \sum_{d|n} \Pi_r\left(\frac{n}{d}\right).$$

Es gibt nach Induktionsvoraussetzung eine nur von $\varepsilon > 0$ abhängige Konstante, sodass

$$\Pi_r(n) \leq C(\varepsilon) n^\varepsilon.$$

Insbesondere ist dann $\Pi_r\left(\frac{n}{d}\right) \leq C(\varepsilon) n^\varepsilon$. Daher gilt für alle $n \geq 1$:

$$\Pi_{r+1}(n) \leq \sum_{d|n} C(\varepsilon) n^\varepsilon \leq C(\varepsilon) n^\varepsilon \Pi_2(n) = O(n^\varepsilon).$$

$\square$

Definition 4.3.6. *Wir definieren von nun an für jedes $r \in \mathbb{N}$*

$$\langle\rangle : \mathrm{Pot}(\mathbb{Z}^r) \longrightarrow \mathrm{Pot}(\mathbb{Z})$$

$$M \longmapsto \langle M \rangle =: \{h_1 \cdots h_r \mid (h_1, ..., h_r) \in M\}.$$

Per Definition ist dann $\langle\emptyset\rangle = \emptyset$.

Lemma 4.3.7. *Es sei* $(M_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ *eine Folge nichtleerer, endlicher Teilmengen des* $\mathbb{Z}^r$ *für welche wir*

$$M_\mu^0 = \{h \in M_\mu \mid h_1 \cdots h_r = 0\}$$

und

$$M_\mu^1 = M_\mu \setminus M_\mu^0$$

definieren. Weiter sei $g_\mu : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ *eine Folge von Abbildungen mit den Eigenschaften* $g_\mu(0) = O(\alpha(\mu))$ *und* $g_\mu(h_1 \cdots h_r) = O(\beta(\mu))$*, wenn* $(h_1, ..., h_r) \in M_\mu^1$*. Gilt dann* $\#M_\mu^0 = O(\gamma_0(\mu))$, $\#\left\langle M_\mu^1 \right\rangle = O(\gamma_1(\mu))$ *und für alle* $\mu \geq 1$*:* $|h_1 \cdots h_r| \leq \delta(\mu)$ *für alle* $(h_1, ..., h_r) \in M_\mu^1$*, so ist*

$$\sum_{h\in M_\mu^0} g_\mu(0) = O(\alpha(\mu)\gamma_0(\mu)),$$

$$\sum_{h\in M_\mu^1} g_\mu(h_1 \cdots h_r) = O(\beta(\mu)\gamma_1(\mu)\delta(\mu)^\varepsilon)$$

und damit insbesondere

$$\sum_{h\in M_\mu} g_\mu(h_1 \cdots h_r) = O(\alpha(\mu)\gamma_0(\mu)) + O(\beta(\mu)\gamma_1(\mu)\delta(\mu)^\varepsilon).$$

Hierbei bezeichnen $\alpha, \beta, \gamma_0, \gamma_1, \delta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ *geeignete Funktionen.*

Beweis. Wir schreiben von nun an $H = h_1 \cdots h_r$. Es gilt

$$\sum_{h\in M_\mu} g_\mu(H) = \sum_{h\in M_\mu^0} g_\mu(0) + \sum_{h\in M_\mu^1} g_\mu(H).$$

Wir werden diese beiden Terme nun einzeln schätzen. Zunächst ist nach Voraussetzung

$$\sum_{h\in M_\mu^0} g_\mu(0) = \#M_\mu^0 g_\mu(0) = O(\alpha(\mu)\gamma_0(\mu))$$

Auf der anderen Seite gilt

$$\sum_{h\in M_\mu^1} g_\mu(H) \leq \sum_{h\in M_\mu^1} C_1\beta(\mu)$$

$$\leq C_1\beta(\mu) \sum_{H\in\left\langle M_\mu^1\right\rangle} 2^r \Pi_r(|H|)$$

und es folgt mit Proposition 4.3.5:

$$\begin{aligned}
&\leq C_1\beta(\mu) \sum_{H\in\left\langle M_\mu^1\right\rangle} 2^r C_\varepsilon \delta(\mu)^\varepsilon \\
&\leq 2^r C_1\beta(\mu)\#\left\langle M_\mu^1\right\rangle C_\varepsilon\delta(\mu)^\varepsilon \\
&\leq 2^{r+1}C_1C_2C_\varepsilon\beta(\mu)\gamma_1(\mu)\delta(\mu)^\varepsilon,
\end{aligned}$$

für geeignete $C_1, C_2, C_\varepsilon > 0$, hinreichend großes μ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Damit folgt

$$\sum_{h\in M_\mu^1} g_\mu(H) = O(\beta(\mu)\gamma_1(\mu)\delta(\mu)^\varepsilon)$$

und gleichsam die Behauptung. □

Proposition 4.3.8. *Es sei $(z_{m,n})_{m,n\in\mathbb{Z}}$ eine Folge komplexer Zahlen, sodass ein $\mu \in \mathbb{N}$ existiere mit*

$$z_{m+\mu,n} = z_{m,n} = z_{m,n+\mu} \qquad \forall m, n \in \mathbb{Z}. \tag{4.3.1}$$

Dann gilt

$$\sum_{h=0}^{\mu-1}\sum_{\ell=0}^{\mu-1} z_{h,\ell} = \sum_{h_1=0}^{\mu-1}\sum_{\ell=0}^{\mu-1} z_{h_1+\ell,\ell}.$$

Beweis. Die Bedingung (4.3.1) lässt sich auch in

$$(k_1, k_2) \equiv (r_1, r_2) \mod \mu \implies z_{k_1,k_2} = z_{r_1,r_2}$$

umformulieren, wobei die Kongruenz hier komponentenweise betrachtet wird. Sei $\mathcal{A} = \{(n, m) : 0 \leq n, m \leq \mu - 1\}$ und $\mathcal{B} = \{(h_1 + \ell, \ell) : 0 \leq h_1, \ell \leq \mu - 1\}$. Damit ist mit $z_{(m,n)} := z_{m,n}$ die Behauptung äquivalent zu

$$\sum_{a\in\mathcal{A}} z_a = \sum_{b\in\mathcal{B}} z_b.$$

Da die Mengen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ die gleiche Kardinalität besitzen und $a_1 \equiv a_2 \mod \mu \iff a_1 = a_2$ für alle $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$, reicht es zu zeigen, dass für jedes $(n, m) \in \mathcal{A}$ ein $(h_1^* + \ell^*, \ell^*) \in \mathcal{B}$

existiert, sodass

$$(h_1^* + \ell^*, \ell^*) - (n, m) \equiv (0,0) \mod \mu.$$

Dies ist offenbar für $\ell^* = m$ und dasjenige $0 \leq h_1^* \leq \mu - 1$ mit $h_1^* + m - n \equiv 0 \mod \mu$ erfüllt. Damit folgt die Behauptung. $\square$

Korollar 4.3.9. *Es sei $\mu \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und $\psi(x,y) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} x^i y^j$ ein Polynom in zwei Variablen mit ganzen Koeffizienten. Dann ist*

$$\sum_{h=0}^{\mu-1} \sum_{\ell=0}^{\mu-1} e_\mu(\psi(h,\ell)) = \sum_{h_1=0}^{\mu-1} \sum_{\ell=0}^{\mu-1} e_\mu(\psi(h_1 + \ell, \ell)).$$

Beweis. Da ψ nur ganze Koeffizienten besitzt, gilt $\psi(x+\mu, y) \equiv \psi(x,y) \equiv \psi(x, y+\mu) \mod \mu$ für alle $x, y \in \mathbb{Z}$. Damit erfüllt $e_\mu(\psi(n,m))_{n,m \in \mathbb{Z}}$ die Bedingung (4.3.1) und Proposition 4.3.8 lässt sich anwenden. $\square$

Proposition 4.3.10. *Es seien $\nu \geq 0$ und $\mu > 0$ ganze Zahlen. Dann gilt*

$$\sum_{n=0}^{\mu-1} e_\mu(n\nu) = \begin{cases} \mu & \textit{falls} \quad \nu \equiv 0 \mod \mu, \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Für $\nu \equiv 0 \mod \mu$ ist die Behauptung klar, zu zeigen bleibt also nur der Fall $= 0$. Angenommen, $\nu \not\equiv 0 \mod \mu$. Dann ist $e_\mu(\nu) \neq 1$ und wir erhalten mit der geometrischen Summenformel

$$\sum_{n=0}^{\mu-1} e_\mu(n\nu) = \frac{1 - e_\mu(\mu\nu)}{1 - e_\mu(\nu)} = 0.$$

$\square$

Lemma 4.3.11. *Für ganze Zahlen $a_1, ..., a_{k-1}$ gilt*

$$T_k := \sum_{h=0}^{q-1} e_q(ph^k + a_{k-1}h^{k-1} + a_{k-2}h^{k-2} + \cdots + a_1 h) = O(q^{\kappa+\varepsilon}).$$

Beweis. Im ersten Teil des Beweises zeigen wir die Ungleichung

$$|T_k|^K \leq q^{K-k} \sum_{h_1, h_2, \ldots, h_{k-1}=0}^{q-1} \left| \sum_{\ell=0}^{q-1} e_q(pk! H\ell) \right|, \tag{4.3.2}$$

wobei wir abkürzend $H = h_1 h_2 \cdots h_{k-1}$ schreiben. Um dies zu zeigen, verifizieren wir folgende Aussage: für alle $2 \leq \nu \leq k-1$ gibt es ganzzahlige Polynome $B_i(h) = B_i(h_1, h_2, ..., h_\nu)$ $(i = 0, 1, 2, ..., k-\nu-1)$ in ν Variablen, sodass folgende Ungleichung gilt:

$$|T_k|^{2^\nu} \leq q^{2^\nu-(\nu+1)} \sum_{h_1,h_2,...,h_\nu=0}^{q-1} \sum_{\ell=0}^{q-1} e_q(pK_\nu H_\nu \ell^{k-\nu} + \sum_{i=0}^{k-\nu-1} B_i(h)\ell^i) \tag{4.3.3}$$

mit $K_\nu = k(k-1)\cdots(k-\nu+1)$ und $H_\nu = h_1 \cdots h_\nu$. Dies tun wir im Folgenden induktiv.

Schritt 1: $\nu = 2$. Es gilt zunächst:

$$\begin{aligned}
|T_k|^2 = T_k\overline{T_k} &= \sum_{h=0}^{q-1} e_q(ph^k + a_{k-1}h^k + \cdots + a_1 h)\overline{\sum_{\ell=0}^{q-1} e_q(p\ell^k + a_{k-1}\ell^{k-1} + \cdots + a_1\ell)} \\
&= \sum_{h=0}^{q-1} e_q(ph^k + a_{k-1}h^k + \cdots + a_1 h) \sum_{\ell=0}^{q-1} e_q(-p\ell^k - a_{k-1}\ell^{k-1} - \cdots - a_1\ell) \\
&= \sum_{h=0}^{q-1}\sum_{\ell=0}^{q-1} e_1(p(h^k - \ell^k) + a_{k-1}(h^{k-1} - \ell^{k-1}) + \cdots + a_1(h-\ell)). \qquad (4.3.4)
\end{aligned}$$

Wir setzen nun $h = h_1 + \ell$. Da $p, a_{k-1}, ..., a_1$ sämtlich ganzzahlig sind, lässt sich Korollar 4.3.9 anwenden und die Summen können umsortiert werden:

$$= \sum_{h_1=0}^{q-1}\sum_{\ell=0}^{q-1} e_q(p((h_1+\ell)^k - \ell^k) + a_{k-1}((h_1+\ell)^{k-1} - \ell^{k-1}) + \cdots + a_1\ell). \tag{4.3.5}$$

Die Differenzen $(h_1+\ell)^n - \ell^n$ lassen sich mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes in Monome eines Polynoms zerlegen, welches ℓ als Variable besitzt. Im Folgenden sortieren wir alle Terme nach den ℓ-Potenzen und erhalten

$$= \sum_{h_1=0}^{q-1}\sum_{\ell=0}^{q-1} e_q(pkh_1\ell^{k-1} + B_{k-2}(h_1)\ell^{k-2} + \cdots + B_0(h_1)) \tag{4.3.6}$$

mit irgendwelchen ganzzahligen Polynomen $B_0, B_1, ..., B_{k-2}$ in der Variablen h_1, deren explizite Form für unseren Beweis keine Rolle spielt. Wir setzen wieder $h = \ell$ und erhalten

$$= \sum_{h_1=0}^{q-1} e_q(B_0(h_1)) \sum_{h=0}^{q-1} e_q(pkh_1h^{k-1} + B_{k-2}(h_1)h^{k-2} + \cdots + B_1(h_1)h). \tag{4.3.7}$$

Jetzt quadrieren wir die Gleichung auf beiden Seiten und wenden anschließend die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung auf die quadrierte Summe an. Wir erhalten damit folgende Abschätzung für $|T_k|^4$:

$$\begin{aligned} |T_k|^4 &= \left[\sum_{h_1=0}^{q-1} e_q(B_0(h_1)) \cdot \sum_{h=0}^{q-1} e_q(pkh_1h^{k-1} + B_{k-2}(h_1)h^{k-2} + \cdots + B_1(h_1)h)\right]^2 \\ &\leq q \cdot \sum_{h_1=0}^{q-1} \left|\sum_{h=0}^{q-1} e_q(pkh_1h^{k-1} + B_{k-2}(h_1)h^{k-2} + \cdots + B_1(h_1)h)\right|^2 . \end{aligned}$$

Analog wie in (4.3.4) erhalten wir mittels $|z|^2 = z\overline{z}$:

$$\begin{aligned} &= q \cdot \sum_{h_1=0}^{q-1} \sum_{h=0}^{q-1} \sum_{\ell=0}^{q-1} e_q(pkh_1(h^{k-1} - \ell^{k-1}) \\ &+ B_{k-2}(h_1)(h^{k-2} - \ell^{k-2}) + \cdots + B_1(h_1)(h - \ell)). \end{aligned}$$

Setzen wir nun $h = h_2 + \ell$ erhalten wir erneut mit Korollar 4.3.9:

$$= q \cdot \sum_{h_1,h_2=0}^{q-1} \sum_{\ell=0}^{q-1} e_q(pk(k-1)h_1h_2\ell^{k-2} + B_{k-3}(h_1,h_2)\ell^{k-3} + \cdots + B_0(h_1,h_2),)$$

wobei $B_{k-2}(h_1, h_2)$, ..., $B_0(h_1, h_2)$ ganzzahlige Polynome in zwei Variablen h_1, h_2 bezeichnen. Damit sind Polynome gefunden und die Ungleichung (4.3.3) für $\nu = 2$ verifiziert.

Schritt 2: $\nu_0 \to \nu_0 + 1$. Der induktive Schritt funktioniert im Wesentlichen genauso wie der Induktionsanfang. Es sei nun angenommen, die Behauptung gelte für ein beliebiges aber festes $2 \leq \nu_0 < k - 1$. Wir zeigen, dass sie dann auch für $\nu_0 + 1$ gelten muss. Nach Voraussetzung existieren dann also ganzzahlige Polynome $B_i(h_1, ..., h_{\nu_0})$ $(i = 0, ..., \nu_0)$, sodass

$$\begin{aligned}|T_k|^{2^{\nu_0}} &\leq q^{2^{\nu_0}-(\nu_0+1)} \sum_{h_1,h_2,\ldots,h_{\nu_0}=0}^{q-1} \sum_{\ell=0}^{q-1} e_q(pK_{\nu_0}H_{\nu_0}\ell^{k-\nu_0} + \sum_{i=0}^{k-\nu_0-1} B_i(h)\ell^i) \\ &= q^{2^{\nu_0}-(\nu_0+1)} \sum_{h_1,h_2,\ldots,h_{\nu_0}=0}^{q-1} B_0(h) \sum_{\ell=0}^{q-1} e_q(pK_{\nu_0}H_{\nu_0}\ell^{k-\nu_0} + \sum_{i=1}^{k-\nu_0-1} B_i(h)\ell^i).\end{aligned}$$

Quadrieren auf beiden Seiten führt uns unter Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung zu der Multisumme:

$$\begin{aligned}|T_k|^{2^{\nu_0+1}} &\leq q^{2^{\nu_0+1}-2(\nu_0+1)} \left[\sum_{h_1,h_2,\ldots,h_{\nu_0}=0}^{q-1} B_0(h) \sum_{\ell=0}^{q-1} e_q(pK_{\nu_0}H_{\nu_0}\ell^{k-\nu_0} + \sum_{i=1}^{k-\nu_0-1} B_i(h)\ell^i) \right]^2 \\ &\leq q^{2^{\nu_0+1}-2(\nu_0+1)} \sum_{h_1,\ldots,h_{\nu_0}=0}^{q-1} |B_0(h)|^2 \cdot \sum_{h_1,\ldots,h_{\nu_0}=0}^{q-1} \left| \sum_{\ell=0}^{q-1} e_q(pK_{\nu_0}H_{\nu_0}\ell^{k-\nu_0} + \sum_{i=1}^{k-\nu_0-1} B_i(h)\ell^i) \right|^2 \\ &= q^{2^{\nu_0+1}-2(\nu_0+1)} q^{\nu_0} \sum_{h_1,\ldots,h_{\nu_0}=0}^{q-1} \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{\ell=0}^{q-1} e_q(pK_{\nu_0}H_{\nu_0}(j^{k-\nu_0} - \ell^{k-\nu_0}) + \sum_{i=1}^{k-\nu_0-1} B_i(h)(j^i - \ell^i)).\end{aligned}$$

Wir setzen $j = h_{\nu_0+1} + \ell$. Da alle Polynome ganzzahlig sind, kann wieder Korollar 4.3.9 angewandt werden und wir erhalten:

$$\begin{aligned}&= q^{2^{\nu_0+1}-(\nu_0+2)} \sum_{h_1,\ldots,h_{\nu_0+1}=0}^{q-1} \sum_{\ell=0}^{q-1} e_q(pK_{\nu_0}H_{\nu_0}((h_{\nu_0+1} + \ell)^{k-\nu_0} - \ell^{k-\nu_0}) \\ &+ \sum_{i=1}^{k-\nu_0-1} B_i(h)((h_{\nu_0+1} + \ell)^i - \ell^i)).\end{aligned}$$

Sortieren wir nun die Terme nach den Potenzen von ℓ, also $\ell^{k-\nu_0-1}, \ell^{k-\nu_0-2}, \ldots$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}&= q^{2^{\nu_0+1}-(\nu_0+2)} \sum_{h_1,\ldots,h_{\nu_0+1}=0}^{q-1} \sum_{\ell=0}^{q-1} e_q(pK_{\nu_0}H_{\nu_0}(k-\nu_0)h_{\nu_0+1}\ell^{k-\nu_0-1} + \sum_{i=0}^{k-\nu_0-2} C_i(h, h_{\nu_0+1})\ell^i) \\ &= q^{2^{\nu_0+1}-(\nu_0+2)} \sum_{h_1,\ldots,h_{\nu_0+1}=0}^{q-1} \sum_{\ell=0}^{q-1} e_q(pK_{\nu_0+1}H_{\nu_0+1}\ell^{k-\nu_0-1} + \sum_{i=0}^{k-\nu_0-2} C_i(h, h_{\nu_0+1})\ell^i),\end{aligned}$$

wobei die $C_i(h, h_{\nu_0+1})$ $(i = 0, \ldots, k-\nu_0-2)$ irgendwelche ganzzahligen Polynome in den

Variablen $h_1, ..., h_{\nu_0+1}$ sind. Da wir die Behauptung für $\nu = 2$ gezeigt haben, gilt sie auch für $\nu = 3, 4, ..., k-1$. Setzen wir also $\nu = k-1$, so folgt unmittelbar

$$|T_k|^K \leq q^{K-k} \sum_{h_1,...,h_{k-1}=0}^{q-1} \sum_{\ell=0}^{q-1} e_q(pk!H\ell + B_0(h)) \leq q^{K-k} \sum_{h_1,...,h_{k-1}=0}^{q-1} \left| \sum_{\ell=0}^{q-1} e_q(pk!H\ell) \right|$$

und somit die Gültigkeit von (4.3.2). Damit ist der erste Teil des Beweises abgeschlossen.

Im zweiten Teil werden wir den in (4.3.2) enthaltenen Summenausdruck aufspalten und die daraus gewonnenen Teilausdrücke einzeln schätzen. Setzen wir

$$M_q^0 := \{(h_1, ..., h_{k-1}) \in \{0, ..., q-1\}^{k-1} \mid H = h_1 \cdots h_{k-1} = 0\}$$

und

$$M_q^1 := \{0, ..., q-1\}^{k-1} \setminus M_q^0,$$

so erhalten wir

$$|T_k|^K \leq \sum_{h \in M_q^0} q^{K-k} \left| \sum_{\ell} e_q(pk!H\ell) \right| + \sum_{h \in M_q^1} q^{K-k} \left| \sum_{\ell} e_q(pk!H\ell) \right| := T' + T''. \tag{4.3.8}$$

Nun gilt aus kombinatorischen Gründen offenbar

$$\# M_q^0 = q^{k-1} - (q-1)^{k-1} = O(q^{k-2}).$$

Da außerdem in diesem Fall $q^{K-k} \sum_{\ell=0}^{q-1} e_q(pk!H\ell) = q^{K-k+1}$, folgt mit Lemma 4.3.7

$$T' = O(q^{K-k+1} q^{k-2}) = O(q^{K-1}). \tag{4.3.9}$$

Zur Betrachtung des zweiten Summanden legen wir zunächst via $(q, k!) = \delta$, die Schreibweisen $k! = \delta k_0$ und $q = \delta Q$ fest. Damit folgt $(pk_0, Q) = 1$. Ist nun $H \neq 0$, so gilt also

$$q^{K-k} \sum_{\ell=0}^{q-1} e_q(pk!H\ell) = q^{K-k} \sum_{\ell=0}^{q-1} e_{\delta Q}(p\delta k_0 H\ell) = \begin{cases} q^{K-k+1} & \text{falls} \quad H \equiv 0 \mod Q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

nach Proposition 4.3.10. Dies erlaubt uns, die betrachtete Summe auf jene Summanden zu reduzieren, die die Eigenschaft $H \equiv 0 \mod Q$ mit sich bringen; wir haben also

$$\sum_{h \in M_q^1} q^{K-k} \sum_{\ell=0}^{q-1} e_q(pk!H\ell) = \sum_{h \in M_q^Q} q^{K-k} \sum_{\ell=0}^{q-1} e_q(pk!H\ell)$$

mit $M_q^Q = \{h \in M_q^1 \mid H \equiv 0 \mod Q\}$. Nun ist $\# \langle M_\mu^Q \rangle$ gerade die Anzahl der betrachteten Werte H, für welche $Q \mid H$ gilt. Aus $0 < H < q^{k-1}$ folgt daher unmittelbar

$$\# \langle M_\mu^Q \rangle \leq \frac{q^{k-1}}{Q}.$$

Da δ beschränkt ist und außerdem $\dfrac{Q}{q} \leq \dfrac{1}{\delta}$, gilt $Q = O(q)$. Damit erhalten wir

$$\# \langle M_\mu^Q \rangle = O(q^{k-2}).$$

Mit Lemma 4.3.7 folgt nun

$$T'' = O(q^{K-k+1} q^{k-2} (q^{k-1})^{\varepsilon}) = O(q^{K-1+\varepsilon}).$$

Insgesamt erhalten wir

$$|T_k|^K = T' + T'' = O(q^{K-1}) + O(q^{K-1+\varepsilon}) = O(q^{K-1+\varepsilon}),$$

also

$$T_k = O(q^{\kappa+\varepsilon}),$$

was zu zeigen war. □

Korollar 4.3.12. *Es gilt*

$$S_{p,q} = O(q^{\kappa+\varepsilon}), \qquad S_{p,q,m} = O(q^{\kappa+\varepsilon}), \qquad S'_{p,q,m} = O(q^{\kappa+\varepsilon}).$$

Beweis. Für $S_{p,q}$ ist die Behauptung mit Lemma 4.3.11 unmittelbar klar. Für $S_{p,q,m}$ beachte man

$$S_{p,q,m} = \sum_{h=0}^{q-1} e_q(ph^k) \cos \frac{2mh\pi}{q}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{h=0}^{q-1} e_q(ph^k)\frac{1}{2}(e_q(mh) + e_q(-mh)) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{h=0}^{q-1} e_q(ph^k + mh) + \sum_{h=0}^{q-1} e_q(ph^k - mh)\right) \\
&= O(q^{\kappa+\varepsilon}).
\end{aligned}
$$

Für $S'_{p,q,m}$ verfahre man analog. □

Wir haben nun eine nicht triviale obere Schranke für die $S_{p,q}$ gefunden - wir können sie für alle $\varepsilon > 0$ mit einer Konstanten $A_\varepsilon > 0$ gleichmäßig durch $|S_{p,q}| \leq A_\varepsilon q^{\kappa+\varepsilon}$ abschätzen. Mit deren Hilfe gelingt uns der

Beweis von Satz 4.3.3. Der zu $p = 0$ und $q = 1$ gehörige Summand ist $(S_{0,1}/1)^s e(0) = 1$, wir schreiben von nun an $\mathcal{S} = 1 + \mathcal{S}'$. Nach Korollar 4.3.12 gilt

$$\frac{S_{p,q}}{q} = O(q^{-\frac{1}{K}+\varepsilon}),$$

also existiert ein $A > 1$, sodass

$$\left|\frac{S_{p,q}}{q}\right| < Aq^{-2\mu}$$

mit $\mu = \frac{1}{4K}$ für alle $q > 1$. Für $q > 1$ gilt außerdem

$$\left|\frac{S_{p,q}}{q}\right| < 1,$$

denn: es gilt offenbar $|S_{p,q}| \leq \sum_{h=0}^{q-1} |e_q(ph^k)| = q$ mit Gleichheit genau dann wenn jeder Summand das gleiche Hauptargument besitzt. Nun ist $e_q(0) = 1$, aber $e_q(p \cdot 1^k) \neq 1$, da $(p, q) = 1$ für alle k. Daher ist $|S_{p,q}|$ strikt kleiner als q und die Behauptung folgt.

Wähle ein $\nu > \max(2, A^{4K})$ und sei

$$\delta = \max_{2 \leq q \leq \nu} \left|\frac{S_{p,q}}{q}\right|.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
|\mathcal{S}'| &\leq \sum_{q=2}^{\nu} \sum_{p} \left| \left(\frac{S_{p,q}}{q} \right)^s e_q(-np) \right| + \sum_{q=\nu+1}^{\infty} \sum_{p} \left| \left(\frac{S_{p,q}}{q} \right)^s e_q(-np) \right| \\
&\leq \delta^s \sum_{q=2}^{\nu} q + \sum_{q=\nu+1}^{\infty} A^s q^{-2\mu s} \sum_{p} |e_q(-np)| \\
&\leq \delta^s \nu^2 + \sum_{q=\nu+1}^{\infty} A^s q^{-2\mu s} q.
\end{aligned}$$

Wegen der Wahl von ν haben wir $Aq^{-2\mu} \leq A(A^{4K})^{-2\mu} = A^{-1}$ für alle $q > \nu$, und daraus folgt $A < q^{\mu}$. Demnach lässt sich die zweite Reihe via $A^s < q^{\mu s}$ weiter abschätzen:

$$\leq \delta^s \nu^2 + \sum_{q=\nu+1}^{\infty} q^{1-\mu s} \leq \delta^s \nu^2 + \frac{\nu^{1-\mu s}}{\mu s - 2} < \frac{1}{2}$$

für alle s hinreichend groß, da $0 < \delta < 1$. Damit ist die absolute Konvergenz der Reihe $\mathcal{S}$ und $|\mathcal{S}'| < \frac{1}{2}$ für hinreichend große Zahlen s gezeigt. Da $\mathcal{S} = 1 + \mathcal{S}'$ sind wir fertig, wenn wir zeigen können, dass $\mathcal{S}'$ reellwertig ist. Dazu reicht es zu verifizieren, dass jede der Summen $\sum_{(p,q)=1}$ in

$$\mathcal{S}'_s(n) = \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{(p,q)=1} \left(\frac{S_{p,q}}{q} \right)^s e_q(-np)$$

für festes $q > 1$ reell ist. Fixieren wir also ein $q > 1$, so ist $(p,q) = 1$ genau dann wenn $(q-p, q) = 1$ und es gilt

$$S_{q-p,q} = \sum_{h=0}^{q-1} e_q((q-p)h^k) = \sum_{h=0}^{q-1} e_q(-ph^k) = \overline{S_{p,q}}.$$

Also ist

$$\left(\frac{S_{q-p,q}}{q} \right)^s e_q(-(q-p)n) = \overline{\left(\frac{S_{p,q}}{q} \right)^s e_q(-pn)}, \tag{4.3.10}$$

und die Summe

$$\sum_{p} = \sum_{1 \leq p < q/2} + \sum_{1 \leq q-p \leq q/2}$$

muss folglich reell sein, da sich die in ihr vorkommenden Summandenpaare bezüglich $p, q-p$ nach (4.3.10) wie komplex Konjugierte zueinander verhalten (mit dem selben Argument ist der einzelne Term bezüglich $p = \frac{q}{2}$ im Falle $2 \mid q$ reell). Da $\mathcal{S}_s(n)$ für die betrachteten Werte s absolut konvergiert, dürfen die Summanden nach diesem Prinzip paarweise angeordnet werden ohne den Grenzwert zu verändern und es folgt die Behauptung. $\square$

4.4 Verhalten von $\theta_k(z)$ auf den minor arcs

Nachdem wir im vorigen Abschnitt die singuläre Reihe genauer in Augenschein genommen haben, werden wir uns jetzt auf das Verhalten der Funktion $\theta_k(z)$ auf den minor arcs konzentrieren. Wie sich herausstellen wird, lässt sich $\theta_k(z)$ für wachsendes n auf der Vereinigung der minor arcs $\mathfrak{m}_n$ für jedes $\varepsilon > 0$ durch den Ausdruck $A_\varepsilon n^{a\kappa+\varepsilon}$ beschränken, wobei A_ε eine von n unabhängige Konstante bezeichnet. Insgesamt erhalten wir

Satz 4.4.1. *Es gilt auf den minor arcs*

$$\theta_k(z) = O(n^{a\kappa+\varepsilon}).$$

Mit anderen Worten haben wir für jedes $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{z\in\mathfrak{m}_n} \left| \frac{\theta_k(z)}{n^{a\kappa+\varepsilon}} \right| < \infty.$$

Um dies zu beweisen, brauchen wir folgendes

Lemma 4.4.2. *Es seien η und ζ beliebige positive reelle Zahlen und μ eine ganze Zahl, sodass*

$$n^{a-\eta} < q < n^{1-(a-\eta)}, \qquad 0 < \mu < n^{a+\zeta},$$

dann gilt

$$U_\mu = \sum_{h=0}^{\mu} e_q(ph^k) = O(n^{a\kappa+\varepsilon}),$$

wobei $\varepsilon = \varepsilon(\eta, \zeta) \to 0^+$ für $\eta, \zeta \to 0$.

Der Beweis des Lemmas ist relativ technisch und aus diesem Grund werden wir ihm einige nützliche Resultate vorausschicken. Unter anderem werden wir vorab eine von H. Weyl gegebene Abschätzung für $|U_\mu|^K$ beweisen.

Definition 4.4.3. *Wir definieren für $\mu, r \in \mathbb{N}$ die Menge $\mathfrak{O}_{r,\mu}$ als die ganzzahligen Punkte im oktaedrischen Bereich $|x_1| + \cdots + |x_r| \le \mu$, also*

$$\mathfrak{O}_{r,\mu} := \{(h_1, ..., h_r) \in \mathbb{Z}^r \mid |h_1| + \cdots + |h_r| \le \mu\}.$$

Hierbei lehnt sich die Bezeichnung $\mathfrak{O}$ an Oktaeder an.

Proposition 4.4.4. *Es sei $r \geq 1$ eine ganze Zahl. Dann ist*

$$\#\mathfrak{O}_{r,\mu} = O(\mu^r).$$

Beweis. Wir verfahren induktiv. Für $r = 1$ ist die Behauptung klar, sie sei also für ein beliebiges aber festes $r \geq 1$ bereits bewiesen. Sei $Z_r(\mu, k) = \#\{(x_1, ..., x_r) \in \mathbb{Z}^r \mid |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_r| + |k| \leq \mu\}$. Offenbar gilt dann $Z_r(\mu, k) \leq Z_r(\mu, 0)$ für alle $\mu, r \geq 1$ und $k \in \mathbb{Z}$. Wir erhalten für die Anzahl $Z_{r+1}(\mu, 0)$ der Lösungen der Ungleichung mit $r + 1$ Unbestimmten

$$\begin{aligned} Z_{r+1}(\mu, 0) &= \sum_{\nu=-\mu}^{\mu} Z_r(\mu, \nu) \\ &\leq (2\mu + 1) Z_r(\mu, 0) \end{aligned}$$

und nach Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} &= (2\mu + 1) O(\mu^r) \\ &= O(\mu^{r+1}). \end{aligned}$$

□

Lemma 4.4.5. *Es sei für $k > 1$*

$$\varphi(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \qquad a_k \neq 0$$

ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Dann gibt es eine nur von k abhängige Konstante $A > 0$, sodass die folgende Ungleichung für alle $n \geq 1$ erfüllt ist:

$$\left| \sum_{h=0}^{n} e(\varphi(h)) \right|^K \leq A n^{K-k} \sum_{(r_1, \ldots, r_{k-1}) \in \mathfrak{O}_{k-1,n}} \left| \sum_{\ell} e(R k! a_k \ell) \right|.$$

Hierbei ist $R = r_1 \cdots r_{k-1}$ und die innere Summe erstreckt sich über eine Sequenz von höchstens $n + 1$ aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen.

Beweis. Der Beweis wird mit analogen Mitteln wie bei jenem von Lemma 4.3.11 geführt.

Wieder kommt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung induktiv zum Einsatz. Daher werden wir ihn nur skizzieren und für technische Details auf [Weyl], Seite 328 ff. verweisen. Betrachten wir die Summe

$$\sigma_n = \sum_{h=0}^{n} e(\varphi(h))$$

so gilt

$$|\sigma_n|^2 = \sum_{0 \leq l_0', l_1 \leq n} e(\varphi(l_0') - \varphi(l_1)).$$

Setzen wir $l_0' = l_0 + l_1$, ist

$$\varphi(l_0') = \varphi(l_0 + l_1) = \varphi(l_1) + l_0 \varphi(l_0, l_1)$$

mit einem Polynom $\varphi(l_0, l_1)$ in zwei Variablen, welches nur Glieder der Ordnung $\leq k-1$ enthält. Mit den Bedingungen $0 \leq l_1 \leq n$ und $0 \leq l_0 + l_1 \leq n$ können wir obere Summe nun so modifizieren, dass l_0 den „1-Oktaeder“ $|l_0| \leq n$ durchläuft und l_1 alle Zahlen, dass für jedes feste l_0 die Bedingung $0 \leq l_0 + l_1 \leq n$ erfüllt ist. Insgesamt gilt

$$|\sigma_n|^2 = \sum_{l_0 \in \mathfrak{O}_{1,n}} \sum_{l_1} e(l_0 \varphi(l_0, l_1)),$$

wobei l_1 in der Inneren Summe von 0 bis $n - |l_0|$ resp. von $|l_0|$ bis n läuft, je nachdem ob gerade $l_0 \geq 0$ oder $l_0 \leq 0$ erfüllt ist. Man beachte, dass das Polynom $\varphi(l_0, l_1)$ den Koeffizienten a_0 nicht mehr enthält und als größte l_1-Potenz $k a_k l_1^{k-1}$ hat. Mit der Cauchy-Schwarschen Ungleichung folgern wir

$$|\sigma_n|^4 \leq \left(\sum_{l_0 \in \mathfrak{O}_{1,n}} 1^2 \right) \sum_{l_0 \in \mathfrak{O}_{1,n}} \left| \sum_{l_1} e(l_0 \varphi(l_0, l_1)) \right|^2 = (\#\mathfrak{O}_{1,n}) \sum_{l_0 \in \mathfrak{O}_{1,n}} \left| \sum_{l_1} e(l_0 \varphi(l_0, l_1)) \right|^2.$$

Auf die innere Summe kann nun wieder das eben präsentierte Prinzip angewandt werden. Wir haben

$$\left| \sum_{l_1} e(l_0 \varphi(l_0, l_1)) \right|^2 = \sum_{l_1', l_2} e(l_0 \varphi(l_0, l_1') - l_0 \varphi(l_0, l_2)).$$

Indem wir $l_1' = l_1 + l_2$ setzen bekommen wir

$$\varphi(l_0, l_1') = \varphi(l_0, l_1 + l_2) = \varphi(l_0, l_2) + l_1 \varphi(l_0, l_1, l_2).$$

Dabei ist $\varphi(l_0, l_1, l_2)$ ein Polynom in drei Veränderlichen der Ordnung $\leq k-2$ und beginnt bei der Entwicklung nach absteigenden Potenzen von l_2 mit $k(k-1)a_k l_2^{k-2}$ und die Koeffizienten a_0 und a_1 tauchen nicht mehr auf. Damit gilt

$$|\sigma_n|^4 \leq (\#\mathfrak{O}_{1,n}) \sum_{l_0,l_1} \sum_{l_2} e(l_0 l_1 \varphi(l_0, l_1, l_2)).$$

Für fixiertes r geht nun l_2 von 0 bis $n-r$, falls $r \geq 0$ und von $|r|$ bis n andernfalls. Lasse daher l_1 von $-(n-r)$ bis $n-r$ laufen und falls $l_0 \geq 0$ und $l_1 \geq 0$ gilt, dann läuft l_2 von 0 bis $n - l_0 - l_1$, falls $s \leq 0$, von $|l_1|$ bis n. Ist nun $l_0 \leq 0$ und $l_1 \leq 0$, so verläuft l_2 analog von $|l_0| - l_1$ bis n und falls $l_0 \leq 0$ und $l_1 \geq 0$ von $|r|$ bis $n - l_1$. Damit wird außen Über den „2-Oktaeder“ $|l_0| + |l_1| \leq n$ summiert und innen über ein Intervall von höchstens $n+1$ Gliedern. Es gilt also in dieser Schreibweise

$$|\sigma_n|^4 \leq (\#\mathfrak{O}_{1,n}) \sum_{(l_0,l_1)\in\mathfrak{O}_{2,n}} \sum_{l_2} e(l_0 l_1 \varphi(l_0, l_1, l_2))$$

und nach abermaliger Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$|\sigma_n|^8 \leq (\#\mathfrak{O}_{1,n})^2 (\#\mathfrak{O}_{2,n}) \sum_{(l_0,l_1)\in\mathfrak{O}_{2,n}} \left| \sum_{l_2} e(l_0 l_1 \varphi(l_0, l_1, l_2)) \right|^2 .$$

Führen wir dieses Prinzip nun immer weiter fort, erhalten wir nach insgesamt $k-2$-maliger Anwendung die Ungleichung

$$|\sigma_n|^{2^{k-1}} \leq \prod_{i=1}^{k-2} (\#\mathfrak{O}_{i,n})^{2^{k-i-2}} \sum_{(l_0,\ldots,l_{k-2})\in\mathfrak{O}_{k-1,n}} \left| \sum_{l} e(l_0 l_1 \cdots l_{k-2} k! a_k l) \right|,$$

wobei die innere Summe ein Intervall von höchstens $n+1$ Zahlen durchläuft, dessen genaue Struktur für unsere weiteren Überlegungen nicht weiter von Bedeutung ist. Mit Hilfe von Proposition 4.4.4 folgern wir

$$\begin{aligned} |\sigma_n|^{2^{k-1}} &= O\left(\prod_{i=1}^{k-2} n^{i2^{k-i-2}} \sum_{(l_0,\ldots,l_{k-2})\in\mathfrak{O}_{k-1,n}} \left| \sum_{l} e(l_0 l_1 \cdots l_{k-2} k! a_k l) \right| \right) \\ &= O\left(n^{2^{k-1}-k} \sum_{(l_0,\ldots,l_{k-2})\in\mathfrak{O}_{k-1,n}} \left| \sum_{l} e(l_0 l_1 \cdots l_{k-2} k! a_k l) \right| \right). \end{aligned}$$

Also gibt es eine nur von k abhängige Konstante A, welche die Behauptete Ungleichung erfüllt. $\square$

Lemma 4.4.6. *Es gilt*

$$\sum_{\lambda=1}^{q-1} \csc\left(\frac{\lambda\pi}{q}\right) = O(q\log q).$$

Beweis. Wählen wir $q > 3$ beliebig, so gilt wegen der Monotonizität des Kosekans im Intervall $(0, \frac{1}{2})$ für jedes $2 \leq k \leq \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$:

$$\frac{1}{q}\csc\left(\frac{k\pi}{q}\right) \leq \int_{(k-1)/q}^{k/q} \csc(\pi x)\mathrm{d}x.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{q}\csc\left(\frac{\pi}{q}\right) + \frac{1}{q}\sum_{\lambda=2}^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} \csc\left(\frac{\pi\lambda}{q}\right) \leq \frac{1}{q}\csc\left(\frac{\pi}{q}\right) + \int_{1/q}^{1/2} \csc(\pi x)\mathrm{d}x.$$

Die betrachtete Summe lässt sich also abschätzen durch

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda=1}^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} \csc\left(\frac{\pi\lambda}{q}\right) &\leq \csc\left(\frac{\pi}{q}\right) + q\int_{1/q}^{1/2} \csc(\pi x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{q}{\pi}\left(\log\cot\frac{\pi}{2q}\right) + O(q) \\
&= O(q\log q).
\end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen folgt schließlich

$$\sum_{\lambda=1}^{q-1} \csc\left(\frac{k\pi}{q}\right) = 2\sum_{\lambda=1}^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} \csc\left(\frac{k\pi}{q}\right) + O(1) = O(q\log q) + O(1) = O(q\log q).$$

$\square$

Proposition 4.4.7. *Seien t, u, v, w ganze Zahlen mit $v, w > 0$. Dann gilt*

$$\left|\sum_{\nu=u}^{u+v} e_w(\nu t)\right| \leq \begin{cases} v+1, & \text{falls} \quad t \equiv 0 \mod w \\ \left|\csc\frac{t\pi}{w}\right| & \text{falls} \quad t \not\equiv 0 \mod w. \end{cases}$$

Beweis. Der Fall $t \equiv 0 \mod w$ ist klar, sei also $t \not\equiv 0 \mod w$. Dann gilt $e_w(t) \neq 1$ und wir erhalten mit der geometrischen Summenformel:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\nu=u}^{u+v} e_w(\nu t)\right| &= \left|e_w((u-1)t)\sum_{\nu=1}^{v+1} e_w(\nu t)\right| \\ &= \left|\frac{e_w((v+2)t) - e_w(t)}{e_w(t)-1}\right| \\ &\leq \frac{2}{|e_w(t)-1|} \\ &= \left|\csc\frac{t\pi}{w}\right|,\end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Bemerkung. Zur Vereinfachung der Übersicht stellt ε im folgenden Beweis je nach Kontext eine beliebig klein wählbare positive Zahl oder eine positive Funktion in η und ζ dar, welche für $\eta, \zeta \longrightarrow 0$ gegen 0 strebt.

Beweis von Lemma 4.4.2. Zu Beginn verschaffen wir uns eine kurze Übersicht über die Dinge, die wir über μ und q wissen:

(i) $n^{a-\eta} < q < n^{1-(a-\eta)}$, also $q = O(n^{1-a+\varepsilon})$

(ii) $0 < \mu < n^{a+\zeta}$, also $\mu = O(n^{a+\varepsilon})$

(iii) $\dfrac{\mu}{q} \leq \dfrac{n^{a+\zeta}}{n^{a-\eta}} = O(n^{\varepsilon})$.

Diese Folgerungen werden im Beweis sehr häufig verwendet und wir werden sie daher unter der Bezeichnung μ-q-Bedingungen vermerken.
Wir definieren für p und q das Polynom $\phi(z) = \frac{p}{q}z^k$. Da $p \neq 0$, lässt sich dann Lemma 4.4.5 auf die potenzierte Exponentialsumme $|U_\mu|^K$ anwenden. Wir erhalten für alle $\mu \geq 1$ eine obere Abschätzung nach Art des Lemmas.

$$|U_\mu|^K \leq A\mu^{K-k} \sum_{h\in\mathfrak{D}_{k-1,\mu}} \left|\sum_{\ell} e_q(k!pH\ell)\right|, \tag{4.4.1}$$

mit einer nur von k abhängigen Konstanten $A > 0$ und $H = h_1h_2\cdots h_{k-1}$, wobei sich die Summe $\sum_\ell$ über eine Sequenz aufeinanderfolgender ganzer Zahlen erstreckt, welche höchstens $\mu + 1$ Glieder besitzt. Daraus folgt die kanonische Abschätzung

$$\left|\sum_{\ell} e_q(k!pH\ell)\right| \leq \mu + 1. \tag{4.4.2}$$

Aus der Definition von $\mathfrak{O}_{k-1,\mu}$ folgt außerdem für $\mu > 1$ unmittelbar $0 \leq |H| < \mu^{k-1}$. Diese relativ grobe Abschätzung ist für unsere Zwecke ausreichend und wird im Laufe des Beweises immer wieder verwendet.

Der Beweis erfolgt in drei Schritten. Zuerst zerlegen wir den Summationsbereich $\mathfrak{O}_{k-1,\mu}$ auf intuitive Weise in zwei disjunkte Mengen $\mathfrak{E}_\mu^0$ und $\mathfrak{E}_\mu$. In den beiden darauffolgenden Schritten ermitteln wir obere Schranken für die Summen über $\mathfrak{E}_\mu^0$ und $\mathfrak{E}_\mu$ unter anderem dadurch, indem wir die Kardinalitäten $\#\mathfrak{E}_\mu^0$ und $\#\mathfrak{E}_\mu$ nach oben abschätzen.

Schritt 1: Wir zerlegen $\mathfrak{O}_{k-1,\mu}$ in

$$\mathfrak{E}_\mu^0 := \{(h_1, ..., h_{k-1}) \in \mathfrak{O}_{k-1,\mu} \mid h_1 \cdots h_{k-1} = 0\}$$

sowie

$$\mathfrak{E}_\mu := \mathfrak{O}_{k-1,\mu} \setminus \mathfrak{E}_\mu^0,$$

und unterteilen damit die Summe (4.4.1) in

$$|U_\mu|^K \leq \sum_{h \in \mathfrak{E}_\mu^0} A\mu^{K-k} \left|\sum_{\ell} e_q(k!pH\ell)\right| + \sum_{h \in \mathfrak{E}_\mu} A\mu^{K-k} \left|\sum_{\ell} e_q(k!pH\ell)\right| := U' + U''.$$

Schritt 2: Zunächst schätzen wir den Ausdruck U' nach oben ab. Nach Proposition 4.4.4 gilt

$$\#\mathfrak{O}_{r,\mu} = O(\mu^r)$$

für $\mu \longrightarrow \infty$ und fixes r. Ist jedoch $H = 0$, so ist $h_i = 0$ für ein $1 \leq i \leq k-1$ und es gilt folglich

$$\#\mathfrak{E}_\mu^0 \leq (k-1)\#\mathfrak{O}_{k-2,\mu} = O(\mu^{k-2}).$$

Die innere Summe lässt sich durch $\mu + 1$ nach oben Abschätzen, ist also in der Klasse $O(\mu)$. Gemeinsam mit dem Vorfaktor μ^{K-k} aus dem Lemma von Weyl ergibt sich damit die Klasse $O(\mu^{K-k+1})$, also

$$A\mu^{K-k}\left|\sum_{\ell} e_q(k!pH\ell)\right| = A\mu^{K-k}O(\mu) = O(\mu^{K-k+1}). \tag{4.4.3}$$

Also gilt für U' mit Lemma 4.3.7 und den μ-q-Bedingungen insgesamt

$$U' = O(\mu^{K-k+1}\mu^{k-2}) = O(\mu^{K-1}) = O(n^{(K-1)a+\varepsilon}). \tag{4.4.4}$$

Schritt 3: Um U'' geeignet abschätzen zu können, zerlegen wir $\mathfrak{E}_\mu$ für $\lambda = 0, 1, 2, ..., q-1$ disjunkt in die Mengen

$$\mathfrak{E}_{\lambda,\mu} = \{(h_1, ..., h_{k-1}) \in \mathfrak{E}_\mu \mid k!ph_1 \cdots h_{k-1} \equiv \lambda \mod q\}.$$

Man beachte noch mal, dass hier keines der h_i den Wert 0 annimmt. Dann gilt

$$U'' \leq \sum_{h\in\mathfrak{E}_{0,\mu}} A\mu^{K-k}\left|\sum_{\ell} e_q(k!pH\ell)\right| + \sum_{\lambda=1}^{q-1}\sum_{h\in\mathfrak{E}_{\lambda,\mu}} A\mu^{K-k}\left|\sum_{\ell} e_q(k!pH\ell)\right|.$$

Außerdem erinnern wir uns an die in Lemma 4.3.11 eingeführte Schreibweise $k! = \delta k_0$ und $q = \delta Q$, sodass $(pk_0, Q) = 1$.

Schritt 3.1: Falls $\lambda = 0$, so haben wir

$$k!pH = \delta k_0 pH \equiv 0 \mod \delta Q \implies k_0 pH \equiv 0 \mod Q \overset{(pk_0,Q)=1}{\implies} H \equiv 0 \mod Q.$$

Da $0 < |H| < \mu^{k-1}$ und höchstens jeder Q-te Wert von H die Eigenschaft $k!pH \equiv 0 \mod q$ erfüllen kann, also in $\langle\mathfrak{E}_{0,\mu}\rangle$ liegt, folgt

$$\#\langle\mathfrak{E}_{0,\mu}\rangle \leq \frac{2\mu^{k-1}}{Q} = O\left(\frac{\mu^{k-1}}{q}\right),$$

(im Falle $\mu^{k-1} < Q$ ist sogar $\#\langle\mathfrak{E}_{0,\mu}\rangle = 0$). Also folgt mit Lemma 4.3.7, (4.4.3) und den μ-q-Bedingungen:

$$U_1'' = O(\mu^{K-k+1}\frac{\mu^{k-1}}{q}(\mu^{k-1})^\varepsilon) = O(\mu^{K-1}\frac{\mu}{q}\mu^\varepsilon) = O(n^{(K-1)a+\varepsilon}). \tag{4.4.5}$$

Schritt 3.2: Wir betrachten nun den Fall $0 < \lambda < q$. Mit Proposition 4.4.7 folgt dann

$$\left|\sum_{\ell} e_q(k!pH\ell)\right| \leq \left|\csc \frac{k!pH\pi}{q}\right|. \tag{4.4.6}$$

Sei nun λ beliebig gewählt. Existiert dann ein H mit $k!pH \equiv \lambda \mod q$, so gilt

$$k!pH \equiv k!pH' \equiv \lambda \mod q$$

mit $H' = h'_1 \cdots h'_{k-1}$ genau dann wenn $H - H' \equiv 0 \mod Q$ bzw.

$$H = mQ + H',$$

wobei m eine ganze Zahl ist. Sei nun ein solches H fixiert und M die Anzahl der ganzzahligen Lösungen der Ungleichung $|H - mQ| < \mu^{k-1}$, dann folgt

$$M \leq \frac{2\mu^{k-1}}{Q} + 1.$$

Folglich gibt es ebenso höchstens M Möglichkeiten für H' und wir haben

$$\# \langle \mathfrak{E}_{\lambda,\mu} \rangle \leq \frac{2\mu^{k-1}}{Q} + 1 = O\left(\frac{\mu^{k-1}}{q} + 1\right).$$

Setzen wir nun

$$\sigma = \sum_{\lambda=1}^{q-1} \csc \frac{\pi\lambda}{q}$$

folgt mit Lemma 4.3.7:

$$\begin{aligned} U_2'' &= O\left(\mu^{K-k}\sigma\left(\frac{\mu^{k-1}}{q} + 1\right)(\mu^{k-1})^{\varepsilon}\right) \\ &= O\left(\mu^{K-k}\sigma \max\left(\frac{\mu^{k-1+\varepsilon}}{q}, \mu^{\varepsilon}\right)\right) \\ &= O\left(\frac{\mu^{K-1}}{q}\sigma\mu^{\varepsilon}\right) + O(\mu^{K-k}\sigma\mu^{\varepsilon}). \end{aligned}$$

Nun gilt aber nach Lemma 4.4.6

$$\sigma = O(q \log q) = O(q^{1+\varepsilon})$$

und somit insgesamt

$$U'' = O(\mu^{K-1+\varepsilon}q^{\varepsilon}) + O(\mu^{K-k+\varepsilon}q^{1+\varepsilon}).$$

Für den ersten Term erhalten wir mit den μ-q-Bedingungen

$$O(\mu^{K-1+\varepsilon}q^{\varepsilon}) = O((n^{a+\zeta})^{K-1+\varepsilon}(n^{1+\eta-a})^{\varepsilon}) = O(n^{(K-1)a+\varepsilon}).$$

Analog folgt

$$\begin{aligned} O(\mu^{K-k+\varepsilon}q^{1+\varepsilon}) &= O((n^{a+\zeta})^{K-k+\varepsilon}(n^{1+\eta-a})^{1+\varepsilon}) \\ &= O(n^{Ka-ka+1-a+\varepsilon}) \\ &= O(n^{(K-1)a+\varepsilon}). \end{aligned}$$

Daraus folgt schließlich

$$U_2'' = O(n^{(K-1)a+\varepsilon}) + O(n^{(K-1)a+\varepsilon}) = O(n^{(K-1)a+\varepsilon}). \tag{4.4.7}$$

Zusammen mit (4.4.4), (4.4.5) und (4.4.7) folgt letztendlich

$$|U_\mu|^K = O(n^{(K-1)a+\varepsilon})$$

und damit

$$U_\mu = O(n^{\kappa a+\varepsilon}),$$

was zu zeigen war. □

Mit Hilfe des Lemmas gelingt uns nun der

Beweis von Satz 4.4.1. Wir schreiben im Folgenden

$$\theta_k(z) = -1 + 2\sum_{\nu=0}^{w} z^{\nu^k} + 2\sum_{\nu=w+1}^{\infty} z^{\nu^k} := -1 + f_1(z) + f_2(z),$$

wobei $w = [n^{a+\zeta}]$ und $\zeta > 0$ beliebig gewählt ist. Für $z \in \Gamma_n$ gilt nun

$$|z^{\nu^k}| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\nu^k} < e^{-\frac{\nu^k}{n}}$$

und damit

$$f_2(z) = O\left(\sum_{\nu=w+1}^{\infty} e^{-\frac{\nu^k}{n}}\right) = O\left(\int_w^{\infty} e^{-\frac{t^k}{n}}\mathrm{d}t\right).$$

Zusammen mit der Variablentransformation $t^k = u$ und der kanonischen Abschätzung $w^k = [n^{a+\zeta}]^k > 2^{-k}(n^{a+\zeta})^k = 2^{-k}n^{1+\zeta k}$ erhalten wir

$$\int_w^{\infty} e^{-\frac{t^k}{n}}\mathrm{d}t = \int_{w^k}^{\infty} e^{-\frac{u}{n}}u^{a-1}a\mathrm{d}u < \int_{2^{-k}n^{1+\zeta k}}^{\infty} e^{-\frac{u}{n}}u^{a-1}a\mathrm{d}u.$$

Mit der weiteren Substitution $u = nx$ ergibt sich

$$\int_{2^{-k}n^{1+\zeta k}}^{\infty} e^{-\frac{u}{n}}u^{a-1}a\mathrm{d}u = an^a\int_{2^{-k}n^{\zeta k}}^{\infty} e^{-x}x^{a-1}\mathrm{d}x.$$

Letzterer Ausdruck strebt für alle $\zeta > 0$ für $n \longrightarrow \infty$ gegen 0 und damit folgt

$$f_2(z) = o(1),$$

also reicht es aus, den Term $f_1(z)$ zu untersuchen. Wir verwenden hierfür die Notation $z = Xe_q(p)$ mit einem $X = \left(1 - \frac{1}{n}\right)e^{i\alpha}$ und erhalten damit zunächst

$$f_1(z) = 2\sum_{\nu=0}^{w} X^{\nu^k}e_q(p\nu^k) = 2\sum_{m=0}^{w^k} a_mX^m$$

mit $a_m = e_q(pm)$, falls $m = \nu^k$ und $a_m = 0$ sonst. Setzen wir $s_m = a_0 + \cdots + a_m$, können wir diesen Ausdruck mit abelsch partieller Summation folgendermaßen umschreiben:

$$f_1(z) = 2\sum_{m=0}^{w^k} s_m(X^m - X^{m+1}) + 2s_{w^k}X^{w^k+1}.$$

Daraus folgt mit $w^k = [n^{a+\zeta}]^k$

$$\begin{aligned}
|f_1(z)| &\leq 2\sum_{m=0}^{w^k} |s_m||X^m||1-X| + 2|s_{w^k}||X^{w^k+1}| \\
&\leq 2[n^{a+\zeta}]^k|1-X|\max_{0\leq m\leq w^k}|s_m| \\
&\leq 2Cn^{1+\zeta k}|1-X|\max_{0\leq m\leq w^k}|s_m| \qquad (4.4.8)
\end{aligned}$$

wobei $C > 0$ eine von n abhängige Konstante bezeichnet. Da z auf einem minor arc $\eta_{p,q}$

liegt, lässt es sich in der Form

$$X = ze_q(-p) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) e^{i\alpha}$$

schreiben, wobei sich der Winkelbereich durch

$$|\alpha| < \frac{2\pi}{q[n^{1-a}]} < \frac{A_1}{qn^{1-a}} < \frac{A_2}{n}, \tag{4.4.9}$$

mit geeigneten Konstanten $A_1, A_2 > 0$ abschätzen lässt.[1] Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} |1 - X| &= \sqrt{(1 - X)\overline{(1 - X)}} \\ &= \sqrt{1 - |X|(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) + |X|^2} \\ &= \sqrt{1 - 2\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cos\alpha + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n^2} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)(2 - 2\cos\alpha)}. \end{aligned}$$

Dies vereinfacht sich mit Hilfe der Identität $1 - \cos 2x \equiv 2\sin^2 x$ zu:

$$= \sqrt{\frac{1}{n^2} + 4\left(1 - \frac{1}{n}\right)\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

Nach (4.4.9) ist $\alpha = O(1/n)$ und wir erhalten:

$$\begin{aligned} &< \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{A_3}{n^2}} \\ &< \frac{A_4}{n} = A_4(1 - |X|), \end{aligned}$$

mit Konstanten $A_3, A_4 > 0$. All diese Abschätzungen sind unabhängig von der Wahl des minor arcs $\eta_{p,q}$. Zusammen mit (4.4.8) folgt damit

$$\sup_{z \in \mathfrak{m}_n} |f_1(z)| = O(n^{\zeta k} \max_{0 \le m \le w^k} |s_m|) = O(n^{\zeta k} \max_{0 \le \mu \le w} |U_\mu|) = O(n^{a\kappa + \varepsilon})$$

nach Lemma 4.4.2. □

[1] An dieser Stelle geht die entscheidende minor arc Bedingung $q > n^a$ ein.

4.5 Verhalten von $\theta_k(z)$ auf den major arcs

Der Schlüssel dieser Arbeit liegt im Verhalten der Funktion $\theta_k(z)$ auf den major arcs. Während sich ihre Gestalt für hinreichend groß gewählte Zahlen s auf den minor arcs später als asymptotisch vernachlässigbar herausstellen wird, kann sie auf den major arcs durch eine funktionentheoretisch einfach zu handhabende Funktion hinreichend gut approximiert werden. Die Strategie dieses Abschnittes ist es also, zuerst die Funktion $\theta_k(z)$ auf einem zunächst beliebigen major arc $\xi_{p,q}$ als Summe zweier nicht-trivialer Funktionen

$$\theta_k(z) = \varphi_{p,q}(z) + \Phi_{p,q}(z)$$

zu schreiben, wobei $\varphi_{p,q}$ eine „elementare“ Funktion bezeichnet. Im darauf folgenden Teil und in 4.6 werden wir zeigen, dass die $\Phi_{p,q}$ auf den major arcs $\xi_{p,q}$ in der Wachstumsklasse $O(n^{a\kappa+\varepsilon})$ liegen und damit später für uns asymptotisch vernachlässigbar sind. In diesem Abschnitt nehmen wir stets an, dass z auf einem major arc $\xi_{p,q}$ liegt. Wir schreiben dann

$$z = Xe_q(p), \qquad X = e^{-\eta}, \qquad Y = q^k\eta$$

wobei

$$\eta = \log\frac{1}{X} = \log\frac{1}{1-\frac{1}{n}} - i\alpha.$$

Insbesondere ist stets $\operatorname{Re} Y > 0$. Man beachte zudem

$$\ell_n := \log\frac{1}{1-\frac{1}{n}} \sim \frac{1}{n}.$$

Proposition 4.5.1. *Auf den major arcs ist $|Y|$ beschränkt, es gilt also $|Y| = O(1)$.*

Beweis. Auf einem major arc gilt $q \le n^a$, also $q^k \le n$. Es folgt

$$|Y| = |q^k(\ell_n - i\alpha)| \le |q^k\ell_n| + |q^k\alpha|.$$

Die Behauptung folgt, da $\ell_n \sim \frac{1}{n}$ und

$$|q^k\alpha| \le \frac{2\pi q^{k-1}}{N} \le \frac{2\pi n^{1-a}}{n^{1-a}-1} = O(1).$$

□

4.5.1 Eine andere Darstellung für $\theta_k(z)$ auf dem major arc $\xi_{p,q}$

Lemma 4.5.2. *Es sei $\xi_{p,q}$ ein major arc. Definieren wir*

$$\psi(m) := \int_0^\infty e^{-Yu^k} \cos(2m\pi u) \mathrm{d}u$$

und

$$\chi(m) := \int_0^\infty e^{-Yu^k} \sin(2m\pi u) \mathrm{d}u,$$

so gilt für alle $z \in \xi_{p,q}$:

$$\theta_k(z) = 2S_{p,q}\psi(0) + 4\sum_{m=1}^{\infty} S_{p,q,m}\psi(m) + 4\sum_{m=1}^{\infty} S'_{p,q,m}\chi(m).$$

Dem Beweis schicken wir ein Lemma aus der Fourier-Analysis voraus.

Lemma 4.5.3. *Die Funktion $\beta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit*

$$\beta(j) := \sum_{\ell=0}^{\infty} \varepsilon_{\ell+j} e^{-Y(\ell+j)^k}$$

wobei

$$\varepsilon_x = \begin{cases} 1, & \textit{falls} \quad x > 0, \\ \frac{1}{2}, & \textit{falls} \quad x = 0, \\ 0, & \textit{sonst} \end{cases}$$

lässt sich für alle $0 \leq j < 1$ darstellen durch

$$\beta(j) = 2\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu \int_0^\infty e^{-Yu^k} \cos(2\pi\nu(u - j)) \mathrm{d}u.$$

Beweis. Da der Realteil von Y positiv ist, konvergiert die Reihe $\beta(j)$ für alle $j \in \mathbb{R}$ absolut und obiger Ausdruck ist wohldefiniert. Setze

$$\tilde{\beta}(j) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \varepsilon_{\ell+j} e^{-Y(\ell+j)^k}.$$

Dann ist $\tilde{\beta}$ offenbar 1-periodisch und stückweise glatt. Auf dem halboffenen Intervall

$[0,1)$ gilt

$$\tilde{\beta}(j) = \begin{cases} \sum_{\ell=0}^{\infty} e^{-Y(\ell+j)^k} & \text{falls} \quad 0 < j < 1 \\ \frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^{\infty} e^{-Y\ell^k} & \text{falls} \quad j = 0 \end{cases} .$$

Zudem gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2}(\tilde{\beta}(\varepsilon) + \tilde{\beta}(-\varepsilon)) &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2} \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} e^{-Y(\ell+\varepsilon)^k} + \sum_{\ell=0}^{\infty} e^{-Y(\ell+1-\varepsilon)^k} \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2} e^{-Y\varepsilon^k} + \frac{1}{2} \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} e^{-Y(\ell+\varepsilon)^k} + \sum_{\ell=1}^{\infty} e^{-Y(\ell-\varepsilon)^k} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^{\infty} e^{-Y\ell^k} \\ &= \tilde{\beta}(0). \end{aligned}$$

Daher lässt sich $\tilde{\beta}$ in eine Fourier-Reihe der Form

$$\tilde{\beta}(j) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos(2\pi\nu j) + b_\nu \sin(2\pi\nu j))$$

entwickeln mit Koeffizienten

$$a_\nu = 2 \int_0^1 \tilde{\beta}(u) \cos(2\pi\nu u) \mathrm{d}u \qquad \text{und} \qquad b_\nu = 2 \int_0^1 \tilde{\beta}(u) \sin(2\pi\nu u) \mathrm{d}u.$$

Bevor wir die Koeffizienten in die Fourierreihe einsetzen, machen wir noch folgende nützliche Beobachtung. Es gilt mit dem Additionstheorem $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$:

$$\begin{aligned} a_\nu \cos(2\pi\nu j) + b_\nu \sin(2\pi\nu j) &= 2 \int_0^1 \tilde{\beta}(u) \left(\cos(2\pi\nu u) \cos(2\pi\nu j) + \sin(2\pi\nu u) \sin(2\pi\nu j) \right) \mathrm{d}u \\ &= 2 \int_0^1 \tilde{\beta}(u) \cos(2\pi\nu(u-j)) \mathrm{d}u \\ &= 2 \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \int_0^1 \varepsilon_{u+\ell} e^{-Y(u+\ell)^k} \cos(2\pi\nu(u+\ell-j)) \mathrm{d}u \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_u e^{-Yu^k} \cos(2\pi\nu(u-j)) \mathrm{d}u \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-Yu^k} \cos(2\pi\nu(u-j)) \mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Setzen wir nun die Koeffizienten in der gerade ermittelten Form in die Fourierreihe ein, ergibt sich

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}(j) &= \int_0^\infty e^{-Yu^k}\mathrm{d}u + 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_0^\infty e^{-Yu^k}\cos(2\pi\nu(u-j))\mathrm{d}u \\ &= 2\sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon_\nu\int_0^\infty e^{-Yu^k}\cos(2\pi\nu(u-j))\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Da offenbar $\tilde{\beta}(j) = \beta(j)$ für alle $0 \leq j < 1$, folgt das Lemma. $\square$

Beweis von Lemma 4.5.2*:* Für den Beweis formen wir den als $\theta_k(z)$ definierten Summenausdruck um. Man beachte dabei die Schreibweise $z = Xe_q(p)$. Es gilt

$$\begin{aligned}\theta_k(z) &= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^{n^k} \\ &= 2\sum_{h=0}^{q-1}\sum_{\ell=0}^{\infty}\varepsilon_{q\ell+h}X^{(q\ell+h)^k}e_q(p(q\ell+h)^k)\end{aligned}$$

und nach Umsortierung und der Substitution $X = e^{-Y/q^k}$

$$= 2\sum_{h=0}^{q-1}e_q(ph^k)\sum_{\ell=0}^{\infty}\varepsilon_{q\ell+h}e^{-Y(\ell+\frac{h}{q})^k}.$$

Es gilt $q\ell + h > 0 \iff \ell + \frac{h}{q} > 0$ und $q\ell + h = 0 \iff \ell + \frac{h}{q} = 0$ für $q \geq 1$, wir können also den Index von ε anpassen, ohne den Wert der Summe zu verändern:

$$\begin{aligned}&= 2\sum_{h=0}^{q-1}e_q(ph^k)\sum_{\ell=0}^{\infty}\varepsilon_{\ell+\frac{h}{q}}e^{-Y(\ell+\frac{h}{q})^k} \\ &= 2\sum_{h=0}^{q-1}e_q(ph^k)\beta\left(\frac{h}{q}\right).\end{aligned}$$

Man beachte, dass stets $0 \leq \frac{h}{q} < 1$ gilt. Wir nutzen jetzt den aus Lemma 4.5.3 gewonnenen Ausdruck für β.

$$= 4\sum_{h=0}^{q-1}e_q(ph^k)\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\int_0^\infty e^{-Yu^k}\cos\left(2\pi mu - \frac{2\pi mh}{q}\right)\mathrm{d}u.$$

Unter Zuhilfenahme des Additionstheorems $\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$ und Vertauschung der Summen erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&= 4\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m S_{p,q,m} \int_0^{\infty} e^{-Yu^k} \cos(2\pi mu)\mathrm{d}u + 4\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m S'_{p,q,m} \int_0^{\infty} e^{-Yu^k} \sin(2\pi mu)\mathrm{d}u \\
&= 2S_{p,q,0}\psi(0) + 4\sum_{m=1}^{\infty} S_{p,q,m}\psi(m) + 4\sum_{m=1}^{\infty} S'_{p,q,m}\chi(m),
\end{aligned}
$$

da offenbar $\chi(0) = 0$. Damit ist das Lemma bewiesen. □

Bemerkung 4.5.4. *Es gilt*

$$
\psi(0) = \int_0^{\infty} e^{-Yu^k}\mathrm{d}u = a\int_0^{\infty} e^{-Yt}t^{a-1}\mathrm{d}t = aY^{-a}\int_0^{\infty} e^{-x}x^{a-1}\mathrm{d}x = Y^{-a}\Gamma(1+a),
$$

wobei für Y^{-a} der Hauptzweig der k-ten Wurzel gewählt sei (d.h. insbesondere: $Y^{-a} = e^{-a\log Y}$ und $-\frac{\pi}{2} < \mathrm{Im}\ \log Y < \frac{\pi}{2}$). Daher haben wir mit $Y = q^k \log\frac{1}{ze_q(-p)}$ die alternative Darstellung

$$
\theta_k(z) = 2\Gamma(1+a)\frac{S_{p,q}}{q}\left(\log\frac{1}{ze_q(-p)}\right)^{-a} + 4\sum_{m=1}^{\infty} S_{p,q,m}\psi(m) + 4\sum_{m=1}^{\infty} S'_{p,q,m}\chi(m).
$$

4.5.2 Asymptotisches Verhalten der Funktionen $\psi(m)$ und $\chi(m)$

Im Vergangenen Teil haben wir die Abbildungen $\psi, \chi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit

$$
\psi(m) = \int_0^{\infty} e^{-Yu^k} \cos(2\pi mu)\mathrm{d}u
$$

resp.

$$
\chi(m) = \int_0^{\infty} e^{-Yu^k} \sin(2\pi mu)\mathrm{d}u
$$

kennen gelernt. Ziel dieses Abschnittes ist es nun, deren Wachstum zu klassifizieren. Wir beginnen hierfür mit folgendem Lemma.

Lemma 4.5.5. *Liegt z auf einem major arc (insbesondere ist $|Y| = O(1)$), so gilt*

$$
\int_0^{\infty} \exp\left(-Yu^k \pm 2m\pi iu\right)\mathrm{d}u = \pm\frac{i}{2\pi m} + O(|Y|m^{-k-1}) + O(m^{-\frac{1}{2}(1-b)}|Y|^{-\frac{1}{2}b}E),
$$

wobei (beachte: $\gamma := \arg Y$)

$$E = \exp\left(-Am^{1+b}|Y|^{-b}\cos\gamma\right)$$

mit einer positiven Konstanten A, die nur von k abhängt.

Bemerkung. Im Beweis dieses Lemmas bezeichnen $A_1, A_2, \ldots$ stets nur von k abhängige, positive Konstanten.

Beweis. Im Folgenden setzen wir

$$\mathcal{I}^{\pm}(Y, m) := \int_0^\infty \exp\left(-Yu^k \pm 2m\pi iu\right) \mathrm{d}u.$$

Es genügt die Behauptung für das positive Vorzeichen zu beweisen - auf das negative schließen wir mittels

$$\overline{\mathcal{I}^+(Y,m)} = \overline{\int_0^\infty \exp(-Yu^k + 2m\pi iu)\mathrm{d}u} = \int_0^\infty \exp(-\overline{Y}u^k - 2m\pi iu)\mathrm{d}u = \mathcal{I}^-(\overline{Y}, m)$$

also durch Umstellen von γ zu $-\gamma$.
Unser erstes Ziel ist es, den Integranden umzuformen, was uns anschließend eine vereinfachende Substitution ermöglichen wird. Sei hierfür

$$Z = \left(\frac{2\pi m}{k}\right)^{1+b} Y^{-b} \qquad \text{und} \qquad u = \frac{kZ}{2m\pi}v,$$

wobei für Y^{-b} der Hauptzweig der Wurzel gewählt werde (dies versichert uns später, dass aus $\operatorname{Re} Y > 0$ auch $\operatorname{Re} Z > 0$ folgt). Dann folgt durch Einsetzen

$$\begin{aligned}
-(Yu^k - 2\pi miu) &= -(Y\frac{k^kZ^k}{(2\pi m)^k}v^k - 2\pi mi\frac{kZ}{2\pi m}v) \\
&= -(YZ\frac{k^kZ^{k-1}}{(2\pi m)^k}v^k - ikZv) \\
&= -(YZ\frac{k^k\left(\frac{2\pi m}{k}\right)^{k-1}\left(\frac{2\pi m}{k}\right)Y^{-1}}{(2\pi m)^k}v^k - ikZv) \\
&= -Z(v^k - kiv).
\end{aligned}$$

Also erhalten wir mit der Variablentransformation $u = \frac{kZ}{2\pi m}v$ zunächst für alle reellen

$Y > 0$:

$$\int_0^\infty \exp\left(-(Yu^k - 2\pi miu)\right) \mathrm{d}u = \frac{kZ}{2\pi m} \int_0^\infty \exp\left(-Z(v^k - kiv)\right) \mathrm{d}v. \tag{4.5.1}$$

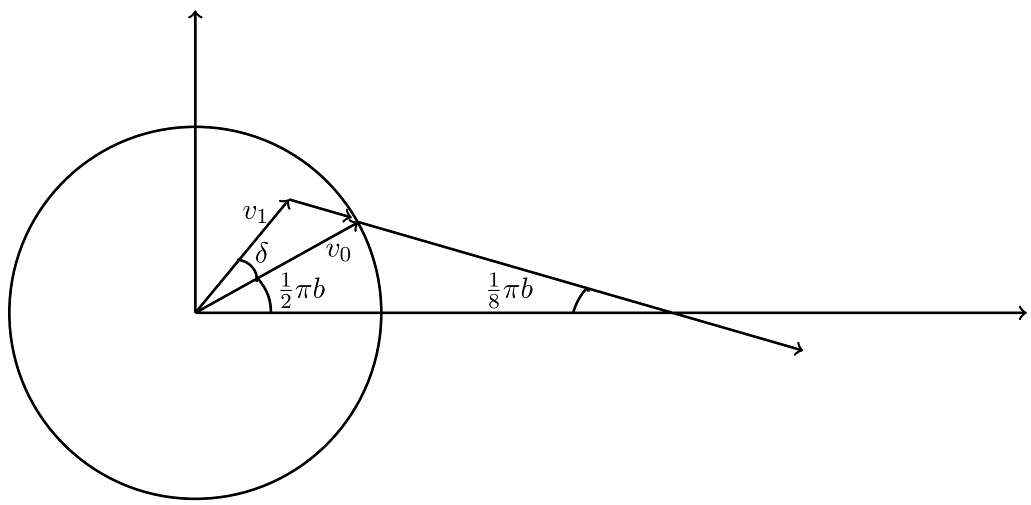
Beide Integrale stellen auf den Halbebenen $\{\mathrm{Re}\ Z > 0\}$ bzw. $\{\mathrm{Re}\ Y > 0\}$ holomorphe Funktionen dar, da sie auf kompakten Teilmengen dieses Bereichs gleichmäßig konvergieren und ihr Integrand selbst eine holomorphe Funktion ist. Fassen wir also die rechte Seite als Funktion von Y auf, folgt mit dem Identitätssatz, dass Gleichung (4.5.1) sogar für alle $\mathrm{Re}\ Y > 0$ gilt.
Um das Integral besser abschätzen zu können, werden wir den Integrationsweg modifizieren, ohne den Wert des Integrals dabei zu verändern. Hierbei gehen wir wie folgt vor: seien c, ξ positive, reelle Zahlen sodass

$$v_0 = \exp\left(\frac{1}{2}b\pi i\right), \qquad v_1 = v_0 - c\exp\left(-\frac{1}{8}b\pi i\right) = \xi v_0 \exp(i\delta).$$

Wir können nun ein $h_1 > 0$ finden, sodass für alle $0 < c < h_1$ folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) $|v_1| \leq 1$ (also insbesondere $0 \leq \xi \leq 1$)

(ii) $0 < \delta \leq \dfrac{\pi}{4k}$.

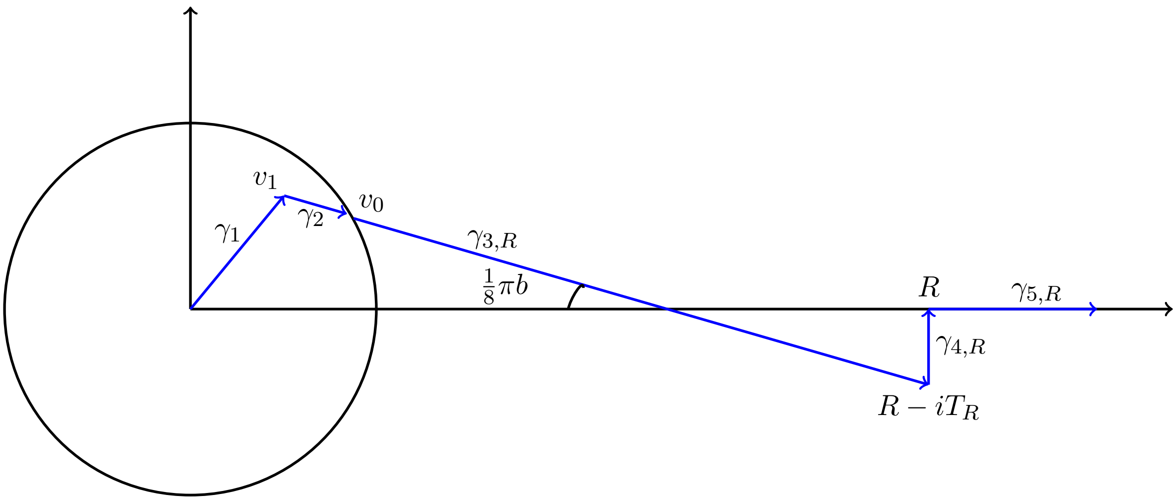


Im Folgenden fixieren wir für jedes k eine Zahl c, welche die obigen Eigenschaften erfüllt. Dabei sei betont, dass c ausschließlich von der Wahl von k und nicht anderer betrachteter Größen abhängt. Folglich sind auch die Größen δ, v_1 und ξ lediglich abhängig von k.

Da der Integrand eine auf der rechten Halbebene holomorphe Funktion ist, können wir das Integral, ohne seinen Wert dabei zu verändern, für hinreichend große $R > 0$ in folgender Weise schreiben:

$$\int_0^\infty = \int_0^{v_1} + \int_{v_1}^{v_0} + \int_{v_0}^{R-iT_R} + \int_{R-iT_R}^{R} + \int_R^\infty = I_1 + I_2 + I_{3,R} + I_{4,R} + I_{5,R}.$$

Dabei schließt die gerade Kurve von v_0 nach $R - iT_R$ mit der reellen Achse einen Winkel von $\frac{1}{8}\pi b$ ein. Die untere Skizze zeigt den neuen Integrationsweg. Dabei bezeichnen wir die Integrationskurven der Integrale I_w mit γ_w für $w = 1, 2, 3, 4, 5$.



Unser Ziel ist es jetzt zu zeigen, dass die letzten beiden Integrale $I_{4,R}$ und $I_{5,R}$ für $R \longrightarrow \infty$ verschwinden, um anschließend

$$\int_0^\infty = \int_0^{v_1} + \int_{v_1}^{v_0} + \lim_{R\to\infty} \int_{v_0}^{R-iT_R} = I_1 + I_2 + I_3 \tag{4.5.2}$$

zu folgern. Für $I_{5,R}$ ist dies klar, wir wenden uns also $I_{4,R}$ zu. Dazu fixieren wir ein $Z = |Z| \exp(i\beta)$, wobei $\beta \in (-\frac{1}{2}b\pi, \frac{1}{2}b\pi)$ gilt, und ein v aus dem Halbkegel $\{-\frac{1}{8}b\pi \leq \arg z \leq 0\}$ mit

$$v = |v| \exp(i\eta), \qquad \eta \in [-\frac{1}{8}b\pi, 0].$$

Wir erhalten zunächst nach einfacher Umformung

$$\begin{aligned} &- Z(v^k - ikv) = -|Z| \exp(i\beta)(|v^k| \exp(ik\eta) - |v|k \exp(i\eta)i) \\ &= -|Z||v|^k \exp(i(\beta + k\eta)) + |Z||v|k \exp(i(\beta + \eta))i \end{aligned}$$

$$= -|Z||v|^k (\cos(\beta + k\eta) + i \sin(\beta + k\eta)) + |Z||v|ki(\cos(\beta + \eta) + i\sin(\beta + \eta))$$

und gelangen damit zu

$$|\exp(-Z(v^k - ikv))| = \exp(-|Z||v|^k \cos(\beta + k\eta) - |Z||v|k \sin(\beta + k\eta)).$$

Nun gilt aber für alle $k \geq 3$

$$|\beta + k\eta| \leq |\beta| + |k\eta| < \frac{1}{2}b\pi + \frac{1}{8}bk\pi = \frac{1}{2}\frac{\pi}{k-1} + \frac{1}{8}\frac{k\pi}{k-1} \leq \frac{7}{16}\pi,$$

also erhalten wir mit $\cos(\beta + k\eta) > \cos(\frac{7}{16}\pi) > 0$:

$$\begin{aligned} |\exp(-Z(v^k - ikv))| &\leq \exp(-\frac{1}{2}|Z||v|^k \cos(\beta + k\eta)) \\ &\leq \exp(-\frac{1}{2}|Z||v|^k \cos\left(\frac{7}{16}\pi\right)) \end{aligned} \tag{4.5.3}$$

wenn $|v|$ hinreichend groß ist. Es gilt für alle hineichend großen $R > 0$:

$$\begin{aligned} |I_{4,R}| &= \left| \int_{\gamma_{4,R}} \exp(-Z(v^k - ikv)) \mathrm{d}v \right| \\ &\leq \ell(\gamma_{4,R}) \sup_{v \in \gamma_{4,R}} |\exp(-Z(v^k - ikv))| \end{aligned}$$

Für alle $v \in \gamma_{4,R}$ gilt $|v| \geq R$. Ferner folgt aus einer elementar-geometrischen Überlegung $|T_R| \leq R \tan\left(\frac{1}{8}b\pi\right)$. Durch Anwendung der Gleichung (4.5.3) erhalten wir

$$\leq \tan\left(\frac{1}{8}b\pi\right) R \exp\left(-\frac{1}{2}|Z|R^k \cos\left(\frac{7}{16}\pi\right)\right) \longrightarrow 0$$

für $R \longrightarrow \infty$. Damit ist (4.5.2) gezeigt.

Wir werden im weiteren Verlauf die Integrale I_1, I_2 und I_3 einzeln untersuchen. Dabei schätzen wir jedes mal den Realteil der im Integranden exponenzierten Funktion $-Z(v^k - kiv)$ nach oben ab um auf das Wachstum der Integrale rückschließen zu können. Die hierbei verwendeten Methoden sind (besonders in den Fällen I_2 und I_3) sehr ähnlich, daher werden wir uns bei quasi analogen Ausführungen kürzer halten.

Wir beginnen mit I_1. Liegt v auf γ_1, so lässt es sich in der Form $v = tv_0 \exp(i\delta)$ mit einem $0 \leq t \leq \xi \leq 1$ schreiben. Da $v_0^{k-1} = i$ und $\Psi := \frac{1}{2}\pi(1-b) + b\gamma$, bekommen wir durch Einsetzen:

$$\begin{aligned}-Z(v^k - kiv) &= -Ziv_0(t^k \exp(ki\delta) - kt\exp(i\delta)) \\ &= |Z| \exp(-\Psi i)\,(t^k \exp(ki\delta) - tk\exp(i\delta)) \\ &= |Z|t\left(t^{k-1}\exp((k\delta - \Psi)i) - k\exp((\delta - \Psi)i)\right).\end{aligned}$$

Es folgt

$$\mathrm{Re}\left(-Z(v^k - kiv)\right) = |Z|t(t^{k-1}\cos(k\delta - \Psi) - k\cos(\delta - \Psi))$$

und mit erneuter Anwendung des Additionstheorems $\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$

$$\begin{aligned}&= |Z|t(t^{k-1}(\cos(k\delta)\cos(\Psi) + \sin(k\delta)\sin(\Psi)) - k(\cos(\delta)\cos(\Psi) + \sin(\delta)\sin(\Psi))) \\ &= |Z|t((t^{k-1}\cos(k\delta) - k\cos(\delta))\cos(\Psi) + (t^{k-1}\sin(k\delta) - k\sin(\delta))\sin(\Psi)).\end{aligned}$$

Da $-\frac{\pi}{2} < \gamma = \arg Y < \frac{\pi}{2}$ gilt aufgrund von $k \geq 3$ schon

$$0 \leq \frac{1}{2}\pi\frac{k-2}{k-1} - \frac{1}{2}\pi\frac{1}{k-1} < \Psi < \frac{1}{2}\pi\frac{k-2}{k-1} + \frac{1}{2}\pi\frac{1}{k-1} = \frac{\pi}{2} \tag{4.5.4}$$

und außerdem ist $0 < \delta \leq \frac{\pi}{4k}$ nach obiger Konstruktion fest gewählt. Wir haben also einerseits $0 \leq t^k\cos(k\delta)\cos(\Psi) \leq \cos(\Psi)$ und andererseits $0 \leq t^k\sin(k\delta)\sin(\Psi) \leq \sin(k\delta)\sin(\Psi)$. Damit folgt:

$$\mathrm{Re}\left(-Z(v^k - kiv)\right) \leq |Z|t((1 - k\cos(\delta))\cos(\Psi) + (\sin(k\delta) - k\sin(\delta))\sin(\Psi)).$$

Nun gilt offenbar $1 - k\cos(\delta) < 0$. Jedoch haben wir auch $\sin(k\delta) - k\sin(\delta) < 0$, *denn:* wir haben für $0 < \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}$ die Ungleichung $\dfrac{\sin(\varepsilon)}{\varepsilon} > \cos(\varepsilon)$, da die Funktion $g(x) = \sin(x) - x\cos(x)$ einerseits $g(0) = 0$ und andererseits $g'(x) = x\sin(x) > 0$ für $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ erfüllt, in diesem Bereich als positiv sein muss. Zudem ist die Funktion $\sin(x)$ im Intervall $(0, \frac{\pi}{2})$ monoton wachsend und konkav, insgesamt haben wir

$$\frac{\sin(\delta)}{\delta} > \cos(\delta) > \frac{\sin(k\delta) - \sin(\delta)}{(k-1)\delta}$$

also

$$k\sin(\delta) > \sin(k\delta).$$

Wir können den oberen Ausdruck also auch in der Form $-A_1\cos(\Psi) - A_2\sin(\Psi)$ mit positiven (von k abhängigen) A_1, A_2 schreiben, was sich für $0 < \Psi < \frac{\pi}{2}$ aber gleichmäßig nach oben abschätzen lässt, also folgt zusammenfassend

$$\operatorname{Re}\left(-Z(v^k - kiv)\right) \leq -A_3|Z|t. \tag{4.5.5}$$

Dies nutzen wir für die Bestimmung einer oberen Schranke von I_1. Es folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{v_1} \exp(-Z(v^k - kiv))\mathrm{d}v \\
&= \int_0^{v_1} \exp(-Zv^k)\exp(Zikv)\mathrm{d}v \\
&= \left[\frac{1}{kiZ}\exp\left(-Z(v^k - kiv)\right)\right]_0^{v_1} - i\int_0^{v_1} v^{k-1}\exp\left(-Z(v^k - kiv)\right)\mathrm{d}v \\
&= \frac{i}{kZ} + \frac{1}{kiZ}\exp(-Z(v_1^k - kiv_1)) - i\int_0^{v_1} v^{k-1}\exp\left(-Z(v^k - kiv)\right)\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

Unter Verwendung von (4.5.5) und $v_1 = v_0\xi\exp(i\delta)$ erhalten wir

$$= \frac{i}{kZ} + O\left(\frac{1}{|Z|}\exp(-A_3\xi|Z|)\right) + O\left(\int_0^{\xi} x^{k-1}\exp(-A_3x|Z|)\mathrm{d}x\right)$$

und mit $\int_0^{\xi} x^{k-1}\exp(-A_3|Z|x)\mathrm{d}x \leq \frac{\Gamma(k)}{A_3^k|Z|^k}$ schließlich

$$= \frac{i}{kZ} + O\left(\frac{1}{|Z|}\exp(-A_3\xi|Z|)\right) + O(|Z|^{-k}). \tag{4.5.6}$$

Kommen wir nun zu I_2. Liegt v auf $\gamma_{2,R}$, haben wir $v = v_0 - y\exp\left(-\frac{1}{8}b\pi i\right)$, wobei $0 \leq y \leq c$. Dies setzen wir für v in $-Z(v^k - kiv)$ ein und erhalten mit dem binomischen Lehrsatz

$$\begin{aligned}
&- Z(v^k - kiv) \\
&= -Z\left(\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}(-1)^n y^n\exp\left(-\frac{1}{8}b\pi in\right)v_0^{k-n} + kiy\exp\left(-\frac{1}{8}b\pi i\right) - kiv_0\right)
\end{aligned}$$

Da $v_0^{k-1} = i$ kürzt sich der Term $kiy \exp\left(-\frac{1}{8}b\pi i\right)$ mit dem Summand bezüglich $n = 1$ genau raus:

$$= -Z\left((v_0^k - kiv_0) + \sum_{n=2}^{k} \binom{k}{n} (-1)^n y^n \exp\left(-\frac{1}{8}b\pi i n\right) v_0^{k-n}\right)$$

Setzen wir $\Psi' = \frac{1}{2}\pi(1-b) - \frac{1}{4}b\pi - b\gamma$, so folgt also

$$= -Z(v_0^k - kiv_0) - A_4|Z| \exp\left(\Psi' i\right) y^2 + O(y^3).$$

Eine zu (4.5.4) analoge Rechnung zeigt uns $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi b \geq \Psi' \geq -\frac{1}{4}\pi b$ für $k \geq 3$, also gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(-Z(v^k - kiv)\right) &\leq \operatorname{Re}\left(-Z(v_0^k - kiv_0)\right) - A_5|Z|y^2 + O(y^3) \\ &\leq \operatorname{Re}\left(-Z(v_0^k - kiv_0)\right) - A_6|Z|y^2 \end{aligned} \tag{4.5.7}$$

für alle $0 \leq y < h_2$ mit h_2 hinreichend klein gewählt. Setzen wir jetzt ohne Einschränkung $c = \frac{1}{2}\min(h_1, h_2)$, so erfüllt c weiterhin alle gewünschten Eigenschaften und es gilt zugleich (4.5.7) im betrachteten Bereich. Es folgt

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{v_1}^{v_0} \exp\left(-Z(v^k - kiv)\right) \mathrm{d}v \\ &= O\left(|\exp(-Z(v_0^k - kiv_0))| \int_0^c \exp\left(-A_6|Z|y^2\right) \mathrm{d}y\right) \\ &= O\left(|Z|^{-\frac{1}{2}} \left|\exp\left(-Z(v_0^k - kiv_0)\right)\right|\right). \end{aligned} \tag{4.5.8}$$

Schließlich haben wir für jedes v auf γ_3 die Darstellung $v = v_0 + r\exp(-\frac{1}{8}\pi bi)$, wobei $r \geq 0$ und somit

$$-Z(v^k - kiv) = -Z(v_0^k - kiv_0) - Z\sum_{n=2}^{k} \binom{k}{n} \exp\left(-\frac{1}{8}nb\pi i\right) v_0^{k-n} r^n. \tag{4.5.9}$$

Wir wollen wieder den Realteil von $-Z(v^k - kiv)$ schätzen. Sei hierfür $\Psi''_n = \frac{1}{2}\pi b(k - n) - \frac{1}{8}\pi bn - b\gamma$, wieder analog zu (4.5.4) folgern wir

$$-\frac{1}{4}\pi b < \Psi''_2 < \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\pi b$$

und

$$-\frac{\pi}{2} < \Psi_n'' < \frac{\pi}{2} \qquad \text{für alle} \qquad 3 \leq n \leq k, \quad k \geq 3.$$

Insbesondere sind die Werte $\cos(\Psi_n'')$ für alle $3 \leq n \leq k$ nicht-negativ. Es folgt also

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{n=3}^{k} Z\binom{k}{n}\exp\left(-\frac{1}{8}nb\pi i\right)v_0^{k-n}r^n\right) = \sum_{n=3}^{k}|Z|\binom{k}{n}r^n\cos(\Psi_n'') \geq 0.$$

Also trägt der Summenausdruck bezüglich $n = 3, ..., k$ für $-Z(v^k - kiv)$ einen negativen Realteil bei und es folgt mit (4.5.9) die Abschätzung

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(-Z(v^k - kiv)\right) &\leq \mathrm{Re}\left(-Z(v_0^k - kiv_0) - Z\binom{k}{2}\exp\left(-\frac{1}{4}b\pi i\right)v_0^{k-2}r^2\right)\\ &\leq \mathrm{Re}\left(-Z(v_0^k - kiv_0)\right) - A_7|Z|r^2.\end{aligned}$$

Wenden wir dies auf unser Integral I_3 an, erhalten wir

$$\begin{aligned} I_3 &= \lim_{R\to\infty}\int_{v_0}^{v_0+R\exp(-1/8b\pi i)} \exp\left(-Z\left(v^k - kiv\right)\right)\mathrm{d}v\\ &= \exp\left(-\frac{1}{8}b\pi i\right)\int_0^\infty \exp\left(-Z(v^k - kiv)\right)\mathrm{d}r\\ &= O\left(\left|\exp\left(-Z(v_0^k - kiv_0)\right)\right|\int_0^\infty \exp\left(-A_7|Z|r^2\right)\mathrm{d}r\right)\\ &= O\left(\left|Z^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-Z(v_0^k - kiv_0)\right)\right|\right). \end{aligned} \tag{4.5.10}$$

Um jetzt die Integrale I_2 und I_3 gemeinsam besser abschätzen zu können, würden wir gerne mehr über den Realteil von $-Z(v_0^k - kiv_0)$ in Erfahrung bringen. Zunächst haben wir nach Definition

$$-Z(v_0^k - kiv_0) = (k-1)Ziv_0 = -(k-1)|Z|\exp(-i\Psi)$$

also gilt

$$\mathrm{Re}\left(-Z(v_0^k - kiv_0)\right) \leq -A_8|Z|\cos\Psi. \tag{4.5.11}$$

Zusammen mit (4.5.8), (4.5.10) und (4.5.11) folgt schließlich

$$I_2 + I_3 = O\left(|Z|^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-A_8|Z|\cos\Psi\right)\right). \tag{4.5.12}$$

Jetzt folgt aus (4.5.6) und (4.5.12)

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I}^+(Y,m) = \frac{kZ}{2m\pi}\left(I_1 + I_2 + I_3\right) \\
&= \frac{kZ}{2m\pi}\left(\frac{i}{kZ} + O\left(\frac{1}{|Z|}\exp(-A_3|Z|)\right) + O\left(|Z|^{-k}\right) + O\left(|Z|^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-A_8|Z|\cos\Psi\right)\right)\right) \\
&= \frac{i}{2m\pi} + O\left(\frac{|Z|^{1-k}}{m}\right) + O\left(\frac{|Z|^{\frac{1}{2}}}{m}\exp\left(-A_8|Z|\cos\Psi\right)\right).
\end{aligned}$$

Wir wollen $\cos\Psi$ gerne in Termen von $\cos\gamma$ schreiben. Hierfür behaupten wir

$$\inf_{\gamma\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\frac{\cos\Psi}{\cos\gamma} > 0,$$

also dass der Quotient für jede Wahl von $|\gamma| < \frac{\pi}{2}$ echt positiv ist und in den Rändern nicht verschwindet. Begründen lässt sich dies beispielsweise so: da $0 \leq \Psi < \frac{\pi}{2}$ für jede Wahl von γ, nimmt der Ausdruck $\frac{\cos\Psi}{\cos\gamma}$ als Funktion von γ aus Stetigkeitsgründen auf jedem Kompaktum $[-\frac{\pi}{2}+\varepsilon, \frac{\pi}{2}-\varepsilon]$ mit $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ ein Minimum $w > 0$ an und wir haben

$$\lim_{\gamma\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\cos\Psi}{\cos\gamma} = \lim_{\gamma\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{b\cos\left(\frac{1}{2}\pi b - \gamma b\right)}{\sin(\gamma)} = b > 0$$

wohingegen der Limes für $\gamma \to -\frac{\pi}{2}^+$ gegen $+\infty$ strebt. Damit lässt sich $\cos\Psi$ durch $\cos\gamma$ multipliziert einer positiven Konstanten nach unten abschätzen. Schreiben wir nun Z in Termen von Y erhalten wir das Lemma. □

Korollar 4.5.6. *Liegt z auf einem major arc, so gilt*

$$\psi(m) = \chi_1(m)$$

und

$$\chi(m) = \frac{1}{2m\pi} + \chi_1(m)$$

wobei

$$\chi_1(m) = O\left(m^{-\frac{1}{2}(1-b)}|Y|^{-\frac{1}{2}b}E\right) + O\left(m^{-k-1}|Y|\right).$$

Beweis. Es gilt

$$\psi(m) + i\chi(m) = \mathcal{I}^+(Y,m).$$

Die Behauptung folgt durch Sortieren nach Real- und Imaginärteil mit Lemma 4.5.5. □

4.6 $\theta_k(z)$ auf den minor und major arcs

Bevor wir zu dem wichtigen Resultat dieses Abschnittes kommen, ist es sicher sinnvoll, unsere bisherigen Erkenntnisse noch einmal kurz zusammenzufassen.
In Abschnitt 4.4 haben wir gezeigt, dass sich die Funktion $\theta_k(z)$ auf den minor arcs für $n = 1, 2, 3, ...$ durch den Fehlerterm $O(n^{a\kappa+\varepsilon})$ gleichmäßig beschränken lässt. Maßgeblich hierfür war die minor arc Bedingung $q > n^a$. Schließlich haben wir in Abschnitt 4.5.1 gesehen, dass sich $\theta_k(z)$ auf dem major arc $\xi_{p,q}$ durch einen nicht-trivialen Summenterm ausdrücken lässt.

$$\theta_k(z) = 2\Gamma(1+a)\frac{S_{p,q}}{q}\left(\log\frac{1}{ze_q(-p)}\right)^{-a} + 4\sum_{m=1}^{\infty} S_{p,q,m}\psi(m) + 4\sum_{m=1}^{\infty} S'_{p,q,m}\chi(m).$$

Der erste Summand ist relativ elementar und wird uns später bei der Approximation von $\theta_k(z)$ auf den major arcs von großer Hilfe sein. Die beiden Summenausdrücke können mit den in Abschnitt 4.5.2. gewonnenen Obergrenzen für $\chi(m)$ und $\psi(m)$ nach oben abgeschätzt werden. Insgesamt erhalten wir dann

Satz 4.6.1. *Auf den minor arcs haben wir*

$$\theta_k(z) = O(n^{a\kappa+\varepsilon})$$

und auf den major arcs

$$\theta_k(z) = \varphi_{p,q}(z) + O(n^{a\kappa+\varepsilon}).$$

Dabei ist

$$\varphi_{p,q}(z) = 2\Gamma(1+a)\frac{S_{p,q}}{q}\left(\log\frac{1}{ze_q(-p)}\right)^{-a}.$$

Beweis. Tragen wir unsere Ergebnisse aus Bemerkung 4.5.4 und Korollar 4.5.6 zusammen, so folgt

$$\theta_k(z) = \varphi_{p,q}(z) + \Phi_{p,q}(z) \tag{4.6.1}$$

wobei

$$\Phi_{p,q}(z) = 4\sum_{m=1}^{\infty} S_{p,q,m}\psi(m) + 4\sum_{m=1}^{\infty} S'_{p,q,m}\chi_1(m) + \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}S'_{p,q,m}.$$

Nach Korollar 4.3.12 gilt $S_{p,q,m} = O(q^{\kappa+\varepsilon})$ und $S'_{p,q,m} = O(q^{\kappa+\varepsilon})$, es folgt daher

$$\Phi_{p,q}(z) = O\left(q^{\kappa+\varepsilon}\sum_{m=1}^{\infty}(|\psi(m)| + |\chi_1(m)|)\right) + \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}S'_{p,q,m}.$$

Wieder unter Anwendung von Korollar 4.5.6 können wir die Terme $|\psi(m)|$ und $|\chi_1(m)|$ schätzen und kommen zu:

$$\begin{aligned}
&= O\left(q^{\kappa+\varepsilon}|Y|^{-\frac{1}{2}b}\sum_{m=1}^{\infty} m^{-\frac{1}{2}(1-b)}E\right) + O\left(q^{\kappa+\varepsilon}|Y|\sum_{m=1}^{\infty} m^{-k-1}\right)\\
&+ \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}S'_{p,q,m}\\
&= \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3.
\end{aligned}$$

Wir wollen jetzt den letzten Summenausdruck genauer untersuchen. Dafür zeigen wir für alle $0 < h < q$

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{m=M+1}^{N}\frac{1}{m}\sin\frac{2\pi mh}{q} = O\left(\frac{1}{M}\csc\frac{\pi}{q}\right)$$

für $M, q \longrightarrow \infty$. Zunächst gilt mit der Definition der Sinusfunktion über die komplexe Exponentialfunktion offenbar

$$\left|\sum_{m=M+1}^{N}\frac{1}{m}\sin\frac{2\pi mh}{q}\right| \leq \frac{1}{2}\left|\sum_{m=M+1}^{N}\frac{e_q(hm)}{m}\right| + \frac{1}{2}\left|\sum_{m=M+1}^{N}\frac{e_q(-hm)}{m}\right| = \left|\sum_{m=M+1}^{N}\frac{e_q(hm)}{m}\right|.$$

Mit der abelschen Ungleichung und Proposition 4.4.7[2] folgern wir

$$\left|\sum_{m=M+1}^{N}\frac{e_q(hm)}{m}\right| \leq \frac{1}{M}\max_{M+1\leq t\leq N}\left|\sum_{m=M+1}^{t}e_q(hm)\right| \leq \frac{1}{M}\left|\csc\left(\frac{h\pi}{q}\right)\right| = O\left(\frac{1}{M}\csc\frac{\pi}{q}\right).$$

Diese Abschätzung wurde unabhängig von N geführt, sie gilt also auch für $N \longrightarrow \infty$. Es sei nun weiter $q > 1$, dann haben wir

$$\sum_{m=M+1}^{\infty}\frac{1}{m}S'_{p,q,m} = \sum_{h=0}^{q-1}e_q(h^k p)\sum_{m=M+1}^{\infty}\frac{1}{m}\sin\frac{2\pi mh}{q}$$

[2] Man beachte $0 < h < q$, also $h \not\equiv 0 \mod q$

$$= \sum_{h=1}^{q-1} e_q(h^k p) O\left(\frac{1}{M} \csc \frac{\pi}{q}\right) = O\left(\frac{q^2}{M}\right). \tag{4.6.2}$$

Für $q = 1$ verschwindet die Summe[3]. Setzen wir $M = q^2 + 1$, so folgt mit (4.6.2) unmittelbar

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} S'_{p,q,m} = \sum_{m=1}^{q^2} \frac{1}{m} S'_{p,q,m} + O(1).$$

Die erste endliche Summe können wir mit $S'_{p,q,m} = O(q^{\kappa+\varepsilon})$ und dem logarithmischen Wachstum der harmonischen Reihe nach oben Abschätzen.

$$\Phi_3 = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{q^2} \frac{1}{m} S'_{p,q,m} + O(1) = O\left(q^{\kappa+\varepsilon} \sum_{m=1}^{q^2} \frac{1}{m}\right) + O(1) = O(q^{\kappa+\varepsilon}). \tag{4.6.3}$$

Im Fall Φ_2 benutzen wir die Beschränktheit von $|Y|$ auf den major arcs, gezeigt in Proposition 4.5.1. Die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} m^{-k-1}$ ist für die von uns betrachteten Werte k absolut konvergent, also gilt

$$\Phi_2 = O\left(q^{\kappa+\varepsilon} |Y| \sum_{m=1}^{\infty} m^{-k-1}\right) = O\left(q^{\kappa+\varepsilon}\right). \tag{4.6.4}$$

Es fehlt jetzt nur noch eine für unsere Zwecke ausreichende Abschätzung für Φ_1. Dafür benötigen wir etwas mehr als die Beschränktheit von $|Y|$. Nach Definition gilt

$$Y = q^k(\ell_n - i\alpha) = |Y| e^{i\gamma}.$$

Es ergibt sich durch Vergleich der Realteile

$$|Y| = \frac{q^k \ell_n}{\cos\gamma} \sim \frac{q^k}{n \cos\gamma}. \tag{4.6.5}$$

Damit folgt durch Einsetzen:

$$E = O\left(\exp\left(-Am^{1+b} q^{-1-b} n^b (\cos\gamma)^{1+b}\right)\right).$$

[3] man beachte, dass $S'_{p,1,m} = 0$ für alle m.

Dies können wir auf die Definition von Φ_1 anwenden:

$$\Phi_1 = O\left(q^{\kappa+\varepsilon}|Y|^{-\frac{1}{2}b}\sum_{m=1}^{\infty} m^{-\frac{1}{2}(1-b)}\exp\left(-Am^{1+b}q^{-1-b}n^b(\cos\gamma)^{1+b}\right)\right).$$

Es existiert nun nach der aus Satz 3.2.5 folgenden Winkelabschätzung auf minor and major arcs eine positive Konstante A_1 mit $0 \leq \alpha^2 < A_1 q^{-2} n^{-2+2a}$. Also können wir den Term $\cos^2\gamma$ nach unten Abschätzen durch

$$\cos^2\gamma = \frac{\ell_n^2}{\ell_n^2+\alpha^2} > \frac{\ell_n^2}{\ell_n^2 + A_1 q^{-2} n^{-2+2a}} \geq A_2 q^2 n^{-2a}.$$

Es folgt

$$q^{-1-b}n^b(\cos\gamma)^{1+b} > A_3 q^{-1-b} n^b (qn^{-a})^{1+b} = A_3.$$

Wir können demnach $|Y|$ unter Verwendung von (4.6.5) nach unten abschätzen durch $|Y| > A_4 q^k n^{-1}$. Wir haben also

$$\Phi_1 = O\left(q^{\kappa+\varepsilon}\left(\frac{q^k}{n}\right)^{-\frac{1}{2}b}\sum_{m=1}^{\infty}\exp\left(-A_5 m^{1+b}\right)\right) = O\left(n^{\frac{1}{2}b}q^{\kappa+\varepsilon-\frac{1}{2}kb}\right).$$

Da $q \leq n^a$, erhalten wir abschließend mit (4.6.3) und (4.6.4):

$$\Phi_{p,q} = O\left(q^{\kappa+\varepsilon}\right) + O\left(n^{\frac{1}{2}b}q^{\kappa+\varepsilon-\frac{1}{2}kb}\right) = O(n^{a\kappa+\varepsilon}). \tag{4.6.6}$$

□

4.7 Approximation der Funktion $\varphi_{p,q}(z)$ mittels Polylogarithmen

Der Ausdruck

$$\varphi_{p,q}(z) = 2\Gamma(1+a)\frac{S_{p,q}}{q}\left(\log \frac{1}{ze_q(-p)}\right)^{-a}$$

ist zwar elementar, birgt jedoch noch einen Nachteil. Die Funktion $z \longmapsto \left(\log \frac{1}{z}\right)^{-a}$ ist nicht stetig in der offenen Einheitskreisscheibe. Jedoch würden wir gerne jegliche Potenz $\varphi^s_{p,q}(z)$ mit $s > 1$ möglichst einfach über die geschlossene Kurve Γ_n integrieren. Ein möglicher Ausweg aus diesem Problem wäre eine in ganz $\mathbb{E}$ holomorphe Funktion $f_s : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{C}$, sodass

$$\left(\log \frac{1}{z}\right)^{-as} = f_s(z) + R_s(z),$$

wobei der Fehler $R_s(z)$ auf ganz $\mathbb{E}$ durch eine Konstante M beschränkt ist. Ziel dieser Sektion ist es, eine solche Funktionenfolge $(f_s)_{s\in\mathbb{N}}$ zu finden. Dafür werden wir in erster Linie die Theorie der Polylogarithmen verwenden.

Definition 4.7.1 (Polylogarithmus)**.** *Für komplexe Zahlen $\alpha \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{E}$ definieren wir den Polylogarithmus durch*

$$\mathrm{Li}_\alpha(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} z^n.$$

Satz 4.7.2. *In der obigen Bezeichnung gilt für jedes $s \geq 1$*

$$f_s(z) = \frac{\mathrm{Li}_{1-as}(z)}{\Gamma(as)}.$$

Die daraus resultierende Funktion $R_s(z)$ ist auf $\mathbb{E}$ in p, q gleichmäßig beschränkt. Insbesondere gilt

$$\varphi_{p,q}(z) = \frac{(2\Gamma(1+a))^s}{\Gamma(as)}\left(\frac{S_{p,q}}{q}\right)^s \mathrm{Li}_{1-as}(ze_q(-pz)) + O(q^{s(\kappa-1)+\varepsilon}).$$

Wir werden diesen Satz in mehreren Schritten beweisen. Zunächst ist es wichtig zu klären, ob der Polylogarithmus die für uns wichtigen Eigenschaften erfüllt.

Proposition 4.7.3. *Der Polylogarithmus* $\mathrm{Li}_\alpha(z)$ *ist eine in* $\mathbb{C}\times\mathbb{E}$ *holomorphe Funktion.*

Beweis. Es sei zunächst $\alpha \in \mathbb{C}$ fixiert. Es reicht die absolute Konvergenz der Potenzreihe für jedes $z \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ zu zeigen. Diese folgt zum Beispiel mit dem Quotientenkriterium

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^{-\alpha} z^{n+1}}{n^{-\alpha} z^n} \right| = |z| < 1.$$

Sei auf der anderen Seite $z \in \mathbb{E}$ fixiert. Wähle eine kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{C}$. In dieser gibt es ein α^* mit minimalem Realteil. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ finden wir ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sodass

$$\sum_{n=N}^{\infty} |n^{-\alpha^*}||z|^n < \varepsilon$$

für alle $N \geq N(\varepsilon)$, da die Reihe wegen $|z| < 1$ absolut konvergiert. Jede der Partialsummen $p_N(\alpha) = \sum_{n=0}^{N} n^{-\alpha} z^n$ ist eine ganze Funktion, wir haben für alle $N \geq N(\varepsilon)$

$$|\mathrm{Li}_\alpha(z) - p_N(\alpha)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |n^{-\alpha}||z|^n \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |n^{-\alpha^*}||z|^n < \varepsilon, \qquad \forall \alpha \in K.$$

Die Holomorphie in der Variablen α in $\mathbb{C}$ folgt mit dem Satz von Weierstraß. Da der Polyloagrithmus offenbar in $\mathbb{C} \times \mathbb{E}$ stetig ist, folgt die Behauptung. □

Lemma 4.7.4. *Es sei* a_n *eine Folge, deren zugehörige Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolut konvergiere. Ferner sei* $U \subseteq \mathbb{C}$ *offen und* $f_n : U \longrightarrow \mathbb{C}$ *eine Folge holomorpher Funktionen, die auf jedem Kompaktum* $K \subset U$ *beschränkt ist, d.h. es existiert eine Konstante* $M(K) > 0$, *sodass*

$$|f_n(z)| < M(K) \qquad \text{für alle } z \in K, \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist die Transformierte

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(z)$$

eine auf U *holomorphe Funktion.*

Beweis. Wir setzen für jede natürliche Zahl N die Funktion $g_N(z)$ als die Partialsumme

$$g_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n f_n(z),$$

diese ist als endliche Summe holomorpher Funktionen wieder eine auf U holomorphe

Funktion. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $K \subset U$ eine beliebige kompakte Teilmenge. Dann existiert eine natürliche Zahl $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sodass $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{M(K)}$ für alle $N \geq N(\varepsilon)$. Damit folgt für alle $N \geq N(\varepsilon)$ und alle $z \in K$:

$$|g(z) - g_N(z)| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n f_n(z) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n||f_n(z)| < \frac{\varepsilon}{M(K)} M(K) = \varepsilon.$$

Also konvergiert die Folge $g_n(z)_{n\in\mathbb{N}}$ holomorpher Funktionen auf Kompakta gleichmäßig gegen die Funktion $g(z)$ und die Behauptung folgt mit dem Satz von Weierstraß. □

Satz 4.7.5. *Es sei $\delta > 1$ gegeben, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U_\delta(0) \times U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann ist die Funktion*

$$\hat{f}(y, \sigma) = \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \int_0^1 f(t, y) t^{-\sigma} \mathrm{d}t$$

holomorph in $\Omega = U \times \{\mathrm{Re}\ \sigma < 0\}$ und lässt sich zu einer in $U \times \mathbb{C}$ holomorphen Funktion fortsetzen.

Beweis. Setzen wir

$$h(t, y, \sigma) = f(t, y) t^{-\sigma},$$

so ist h eine auf der Menge $[0,1] \times \Omega$ stetige Funktion, und für alle fixierten $t^* \in [0,1], y^* \in U, \sigma^* \in \{\mathrm{Re}\ \sigma < 0\}$ sind $y \longmapsto h(t^*, y, \sigma^*)$ und $\sigma \longmapsto h(t^*, y^*, \sigma)$ auf U bzw. $\{\mathrm{Re}\ \sigma < 0\}$ holomorphe Funktionen. Es folgt nach der Leibnizschen Regel, dass die Funktion

$$\hat{f}(y, \sigma) = \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \int_0^1 f(t, y) t^{-\sigma} \mathrm{d}t$$

holomorph in den Veränderlichen y bzw. σ ist. $\hat{f}$ ist eine auf Ω stetige Funktion, *denn:* sei $(y_n, \sigma_n) \in \Omega$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $(y_0, \sigma_0) \in \Omega$. Offenbar ist die Funktion f für alle fixierten $y \in U$ auf $[0,1]$ beschränkt. Es folgt mit dem Satz über die dominierte Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Gamma(1-\sigma_n)} \int_0^1 f(t, y_n) t^{-\sigma_n} \mathrm{d}t = \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f(t, y_n) t^{-\sigma_n} \mathrm{d}t,$$

was genau dem Wert $\hat{f}(y, \sigma)$ entspricht, da das Produkt zweier konvergenter Folgen wieder konvergiert und das Produkt der Grenzwerte annimmt. Damit ist sie eine auf ganz Ω holomorphe Funktion.

Nach Voraussetzung lässt sich f für jedes $y \in U$ in eine Potenzreihe der Form

$$f(t,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(y) t^n,$$

entwickeln, welche auf kompakten Teilmengen $K \subset U_\delta(0)$ absolut und gleichmäßig konvergiert. Daher dürfen wir Integration und Summation vertauschen und erhalten

$$\hat{f}(y,\sigma) = \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi_n(y)}{n+1-\sigma}.$$

Fixieren wir ein $y \in U$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(y)$ absolut. Jede der Funktionen

$$\alpha_n(\sigma) = \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \frac{1}{n+1-\sigma}$$

ist ganz, da die einfachen Polstellen der Funktion $\Gamma(1-\sigma)$ bei $\mathbb{N}_0$ die Nullstellen der Funktion $\sigma \longmapsto n - \sigma + 1$ bei $\{n+1, n+2, ...\} \subset \mathbb{N}_0$ wegheben. Da die α_n offenbar auf jedem Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ gleichmäßig beschränkt sind (ja sogar gleichmäßig gegen die Nullfunktion streben), folgt mit Lemma 4.7.4, dass sich die Funktion $\hat{f}(y,\sigma)$ für alle $y \in U$ zu einer ganzen Funktion in der Variablen σ fortsetzen lässt. Fixieren wir auf der anderen Seite ein $\sigma \in \mathbb{C}$ und setzen sogleich $m = [\mathrm{Re}\ \sigma]$ als die untere Gaußklammer des Realteils von σ, so ist mit der selben Argumentation wie oben

$$S_{m+1}(y) = \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \int_0^1 \left(f(t,y) - \sum_{n=0}^{m} \xi_n(y) t^n \right) t^{-\sigma} \mathrm{d}t$$

eine in ganz U holomorphe Funktion. Es gilt

$$S_{m+1}(y) = \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\xi_n(y)}{n+1-\sigma}$$

und da f eine in $U_\delta(0) \times U$ holomorphe Funktion ist, ist jedes der $\xi_n(y)$ für $n = 0, 1, 2, ...,$ gegeben durch

$$\xi_n(y) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f(t,y)}{\partial t^n} \bigg|_{t=0},$$

eine in U holomorphe Funktion. Damit lässt sich die Summe $S_{m+1}(y)$, ohne Holomorphie zu verlieren, nach unten bis $n = 0$ zu $\hat{f}(y,\sigma)$ auffüllen. Da die Fortsetzung $\hat{f}$ offenbar stetig in $U \times \mathbb{C}$ ist, folgt die Behauptung. $\square$

Satz 4.7.6. *Sei $\sigma > 0$ fest gewählt. Dann lässt sich die Funktion $W : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{C}$*

$$W(z) = \frac{\mathrm{Li}_{1-\sigma}(z)}{\Gamma(\sigma)} - \left(\log \frac{1}{z}\right)^{-\sigma}$$

auf folgende Art und Weise auf $\overline{\mathbb{E}}$ fortsetzen: nach $\overline{\mathbb{E}} \backslash \{-1\}$ erfolgt die Fortsetzung stetig, nach $z = -1$ stetig von oben, d.h. für jede Folge $x_n \in \mathbb{E}$ mit $\arg x_n > 0$ und $x_n \longrightarrow -1$ existiert

$$\lim_{n\to\infty} W(x_n) =: W(-1).$$

$W(z)$ ist eine auf ganz $\overline{\mathbb{E}}$ beschränkte Funktion, insbesondere folgt Satz 4.7.2.

Beweis. Es seien

$$\mathbb{X} := \{-\pi < \mathrm{Im}\ y < \pi, \mathrm{Re}\ y > 0\} \qquad \text{und} \qquad \mathbb{X}^* := \{-\pi < \mathrm{Im}\ y \leq \pi, \mathrm{Re}\ y \geq 0\}$$

und

$$\mathbb{H}_{>0} := \{\sigma \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\ \sigma > 0\}.$$

Dann haben wir eine kanonische Bijektion von Mengen

$$\mathbb{X}^* \longrightarrow \overline{\mathbb{E}}, \quad y \longmapsto e^{-y}$$

mit Umkehrabbildung

$$\overline{\mathbb{E}} \longrightarrow \mathbb{X}^*, \quad x \longmapsto \log \frac{1}{x}.$$

Für die Aussage des Satzes reicht es zu zeigen, dass sich die Funktion

$$V(y) = \Gamma(\sigma)W(e^{-y}) = \mathrm{Li}_{1-\sigma}(e^{-y}) - \Gamma(\sigma)y^{-\sigma}$$

für jedes $\sigma > 0$ von $\mathbb{X}$ auf $\overline{\mathbb{X}}$ stetig fortsetzen lässt und durch eine Konstante $M(\sigma)$ beschränkt ist. Schränken wir anschließend $\overline{\mathbb{X}}$ auf $\mathbb{X}^*$ ein, folgt der Satz.
Wir zeigen im ersten Schritt, dass sich die Funktion

$$F(y,\sigma) = \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^{t+y}-1} - \frac{1}{t+y}\right) t^{-\sigma} \mathrm{d}t$$

holomorph auf ganz $\mathbb{X} \times \mathbb{H}_{>0}$ fortsetzen lässt und diese Fortsetzung zusätzlich stetig in $\overline{\mathbb{X}} \times \mathbb{H}_{>0}$ ist. Zunächst ist klar, dass $F(y,\sigma)$ eine in $\mathbb{X} \times \{0 < \mathrm{Re}\ \sigma < 1\}$ holomorphe

Funktion ist, da beide Integrale

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{t^{-\sigma}}{e^{t+y}-1}\mathrm{d}t \qquad \text{und} \qquad I_2 = \int_0^\infty \frac{t^{-\sigma}}{t+y}\mathrm{d}t$$

dann auf kompakten Teilmengen der jeweiligen Mengen absolut und gleichmäßig konvergieren. Die Funktion

$$f(t,y) = \frac{1}{e^{t+y}-1} - \frac{1}{t+y}$$

ist für fixiertes $y \in \overline{\mathbb{X}}$ in ganz $\mathbb{C}$ meromorph mit Polstellen bei $t = -y+2\pi ki$ $(k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\})$ und einer hebbaren Singularität in $t = -y$. Die Menge der Singularitäten der Funktion f in $\mathbb{C}^2$ ist gegeben durch

$$S = \{(t,y) \in \mathbb{C}^2 \mid \mathrm{Re}\ (t+y) = 0, \mathrm{Im}\ (t+y) \in 2\pi i(\mathbb{Z} \setminus \{0\})\}.$$

Es existiert eine offene Menge $\overline{\mathbb{X}} \subset \Omega$ und ein $\delta > 1$ mit $S \cap U_\delta(0) \times \Omega = \emptyset$, denn wir finden für alle $\varepsilon > 0$ ein $\overline{\mathbb{X}} \subset \Omega$, sodass

$$\sup_{z\in\Omega} |\mathrm{Im}\ (z)| \leq \pi + \varepsilon.$$

Damit gilt

$$\sup_{(t,y)\in U_\delta(0)\times\Omega} |\mathrm{Im}\ (t+y)| \leq \pi + \varepsilon + \delta < 2\pi$$

für jedes $1 < \delta < \pi - \varepsilon$. Folglich ist f auf $U_\delta(0) \times \Omega$ in beiden Veränderlichen holomorph. Da f dort offenbar stetig ist, ist f eine in $U_\delta(0) \times \Omega$ holomorphe Funktion. Wir zerlegen den Integrationsweg von F in $[0,1]$ und $[1,\infty)$ und bekommen:

$$F(y,\sigma) = \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \int_0^1 f(t,y)t^{-\sigma}\mathrm{d}t + \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \int_1^\infty f(t,y)t^{-\sigma}\mathrm{d}t.$$

Erster Ausdruck lässt sich nach Satz 4.7.5 zu einer in ganz $\Omega \times \mathbb{C}$ holomorphen Funktion fortsetzen. Man rechnet leicht nach, dass das zweite Integral auf kompakten Teilmengen $K \subset \Omega \times \mathbb{H}_{>0}$ absolut und gleichmäßig konvergiert, dort eine stetige Funktion und damit eine in $\Omega \times \mathbb{H}_{>0}$ holomorphe Funktion ist. Es folgt abschließend durch Einschränkung, dass die Funktion F eine auf $\mathbb{X} \times \mathbb{H}_{>0}$ holomorph ist und stetig nach $\overline{\mathbb{X}} \times \mathbb{H}_{>0}$ fortgesetzt werden kann. Im zweiten Schritt zeigen wir

$$F(y,\sigma) = \mathrm{Li}_{1-\sigma}(e^{-y}) - \Gamma(\sigma)y^{-\sigma}.$$

Es gilt für alle Re $y > 0$ und $1 >$ Re $\sigma > 0$:

$$\int_0^\infty \frac{t^{-\sigma}}{e^{t+y}-1}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^\infty e^{-ny}\int_0^\infty e^{-nt}t^{-\sigma}\mathrm{d}t = \Gamma(1-\sigma)\sum_{n=1}^\infty n^{\sigma-1}e^{-ny} = \Gamma(1-\sigma)\mathrm{Li}_{1-\sigma}(e^{-y}),$$

und

$$\int_0^\infty \frac{t^{-\sigma}}{t+y}\mathrm{d}t = \Gamma(1-\sigma)\Gamma(\sigma)y^{-\sigma},$$

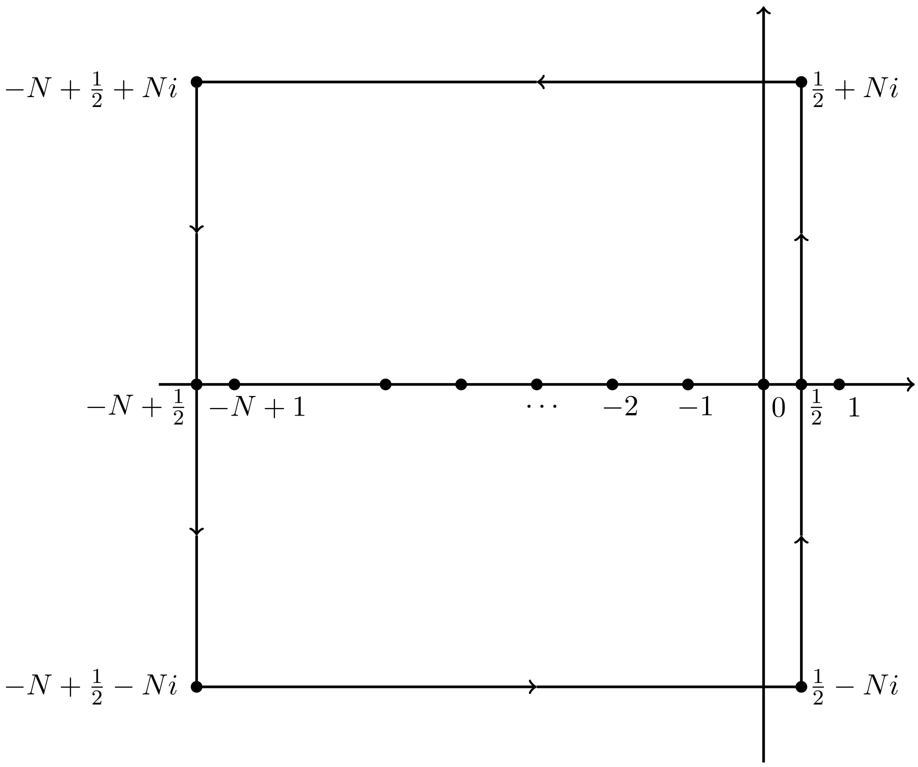
denn: die Funktion $h(\sigma) = \Gamma(1-\sigma)\Gamma(\sigma)y^{\sigma-1}$ ist im Streifen $0 <$ Re $\sigma < 1$ holomorph und schnell abfallend, wir definieren

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\Gamma(1-\sigma)\Gamma(\sigma)y^{\sigma-1}x^{-\sigma}\mathrm{d}\sigma.$$

Sei $y > 0$ fixiert und ohne Einschränkung $y > x > 0$. Betrachte die geschlossenen Kurvenintegrale

$$I_N = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\square(N)}\Gamma(1-\sigma)\Gamma(\sigma)y^{\sigma-1}x^{-\sigma}\mathrm{d}\sigma$$

wobei $\square(N)$ das Rechteck mit Ecken $\frac{1}{2}\pm Ni$ und $\frac{1}{2}-N\pm Ni$ bezeichne ($N\in\mathbb{N}$), welches in mathematisch positiver Richtung einfach umlaufen werde.



Wir haben dann

$$\begin{aligned} I_N &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-Ni}^{\frac{1}{2}+Ni} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}+Ni}^{\frac{1}{2}-N+Ni} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-N+Ni}^{\frac{1}{2}-N-Ni} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-N-Ni}^{\frac{1}{2}-Ni} \\ &= I_{N,1} + I_{N,2} + I_{N,3} + I_{N,4} \end{aligned}$$

und wollen zeigen, dass die Integrale $I_{N,2}, I_{N,3}$ und $I_{N,4}$ für $N \longrightarrow \infty$ verschwinden. Im Falle von $I_{N,2}$ und $I_{N,4}$ wenden wir die Standardabschätzung für Integrale und den Ergänzungssatz für die Gamma-Funktion an.

$$|I_{N,2}| \leq \frac{N}{2\pi y} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{2\pi}{e^{\pi N} - e^{-\pi N}} \longrightarrow 0, \qquad N \longrightarrow \infty.$$

Analog folgert man $I_{N,4} \longrightarrow 0$. Im Falle von $I_{N,3}$ lässt sich der Gamma-Anteil des Integrand wieder mit Hilfe des Ergänzungssatzes und des monotonen Wachstums des Betrages der komplexen Sinusfunktion parallel der imaginären Achse durch eine Konstante nach oben beschränken. Es folgt damit

$$\begin{aligned} |I_{N,3}| &\leq \frac{1}{2\pi y}\int_{-N}^{N} \left|\Gamma(\frac{1}{2} + N - \tau i)\Gamma(\frac{1}{2} - N + \tau i)\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}-N+\tau i} \mathrm{d}\tau\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi y}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}-N} \int_{-N}^{N} \left|\Gamma(\frac{1}{2} + N - \tau i)\Gamma(\frac{1}{2} - N + \tau i)\mathrm{d}\tau\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi y}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}-N} \frac{4N\pi}{\sin(\pi/2)} \xrightarrow{x<y} 0. \end{aligned}$$

Also folgt insgesamt

$$\lim_{N\to\infty} I_N = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \Gamma(1-\sigma)\Gamma(\sigma)y^{\sigma-1}x^{-\sigma}\mathrm{d}\sigma.$$

Mit dem Residuensatz können wir dieses Integral als Summe der Residuen der Funktion $\Gamma(1-\sigma)\Gamma(\sigma)y^{\sigma-1}x^{-\sigma}$ an den Stellen $\sigma = 0, -1, -2, -3, \ldots$ darstellen. Es folgt zusammen mit dem Ergänzungssatz für die Gamma-Funktion:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \Gamma(1-\sigma)\Gamma(\sigma)y^{\sigma-1}x^{-\sigma}\mathrm{d}\sigma &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Res}_{\sigma=-n} \frac{\pi}{\sin(\pi\sigma)} y^{\sigma-1}x^{-\sigma} \\ &= \frac{1}{y}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{x}{y}\right)^n \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{x+y}.$$

Der Fall $x > y > 0$ funktioniert analog unter der Wahl eines Rechtecks mit Ecken $\frac{1}{2} \pm Ni$ und $\frac{1}{2} + N \pm Ni$. Der Fall $x = y$ folgt aus Gründen der Stetigkeit - insgesamt haben wir

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \Gamma(1-\sigma)\Gamma(\sigma) y^{\sigma-1} x^{-\sigma} \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{x+y}$$

für alle $x, y > 0$. Mit dem Umkehrsatz von Mellin folgt

$$\int_0^\infty \frac{x^{\sigma-1}}{x+y} \mathrm{d}x = \Gamma(1-\sigma)\Gamma(\sigma) y^{\sigma-1} \tag{4.7.1}$$

für alle $1 > \mathrm{Re}\ \sigma > 0$ und alle $y > 0$. (4.7.1) folgt für alle $\mathrm{Re}\ y > 0$ mittels analytischer Fortsetzung.

Wir haben gezeigt, dass

$$F(y, \sigma) = \mathrm{Li}_{1-\sigma}(e^{-y}) - \Gamma(\sigma) y^{-\sigma}$$

für alle $(y, \sigma) \in \mathbb{X} \times \{1 > \mathrm{Re}\ \sigma > 0\}$ gilt. Da sich beide Seiten holomorph nach $\mathbb{X} \times \mathbb{H}_{>0}$ fortsetzen lassen, folgt Schritt zwei mit dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen. Da sich $F(y, \sigma)$ stetig nach $\overline{\mathbb{X}}$ fortsetzen lässt, gilt dies auch für $\mathrm{Li}_{1-\sigma}(e^{-y}) - \Gamma(\sigma) y^{-\sigma}$. Um Beschränktheit für fixierte $\sigma > 0$ einzusehen, zerteilen wir die Menge $\overline{\mathbb{X}}$ für ein $y^* > 0$ in

$$\{y \in \overline{\mathbb{X}} \mid 0 \leq \mathrm{Re}\ y \leq y^*\} \cup \{y \in \overline{\mathbb{X}} \mid \mathrm{Re}\ y > y^*\}.$$

Erste Menge ist kompakt und die stetige Funktion $y \longmapsto F(y, \sigma)$ nimmt dort ein Betragsmaximum $M_1(\sigma)$ an. Für alle y der anderen Menge gilt

$$|\mathrm{Li}_{1-\sigma}(e^{-y}) - \Gamma(\sigma) y^{-\sigma}| < \sum_{n=1}^\infty n^{\sigma-1} e^{-y^* n} + \Gamma(\sigma)(y^*)^{-\sigma} < M_2(\sigma)$$

Wählen wir $M(\sigma) = \max(M_1(\sigma), M_2(\sigma))$, folgt damit

$$|\mathrm{Li}_{1-\sigma}(e^{-y}) - \Gamma(\sigma) y^{-\sigma}| < M(\sigma)$$

für alle $y \in \overline{\mathbb{X}}$. Damit ist der Satz bewiesen. □

Korollar 4.7.7. *Es gilt für $y < 1$*

$$\mathrm{Li}_y(z) = O(|1-z|^{y-1}).$$

Beweis. Folgt mit

$$\left(\log\frac{1}{z}\right)^{-1} = O(|1-z|^{-1})$$

sofort aus Satz 4.7.6. □

4.8 Asymptotisches Verhalten der Koeffizienten $r_{k,s}(n)$

Mit den Informationen über die Funktion $\theta_k(z)$ auf den minor und major arcs können wir jetzt den folgenden Satz beweisen, aus welchem die zu zeigenden Theoreme 1.0.2 und 1.0.3 als Korollare folgern.

Satz 4.8.1. *Es sei $s > 2^k + 1$ fixiert, dann gilt*

$$r_{k,s}(n) = \frac{(2\Gamma(1+a))^s}{\Gamma(sa)} n^{sa-1} \sum_{(p,q)\in\mathcal{F}_N^*} \left(\frac{S_{p,q}}{q}\right)^s e_q(-np) + O\left(n^{sa\kappa+\varepsilon}\right) + O\left(n^{a\kappa+as-a-1+\varepsilon}\right).$$

Dabei ist $\mathcal{F}_N^*$ die Menge aller $(p,q) \in \mathcal{F}_N$, sodass $\xi_{p,q}$ ein major arc ist.

Beweis. Aus Satz 4.2.6 wissen wir, dass wir die Koeffizienten $r_{k,s}(n)$ durch folgendes Integral ausdrücken können:

$$r_{k,s}(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_n} \frac{\theta_k^s(z)}{z^{n+1}} \mathrm{d}z.$$

Dies lässt sich in Termen der major und minor arcs umschreiben in

$$\begin{aligned} r_{k,s}(n) &= \sum_{(p,q)\in\mathcal{F}_N} \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi_{p,q}} \frac{\theta_k^s(z)}{z^{n+1}} \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{M}_n} \frac{\theta_k^s(z)}{z^{n+1}} \mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{m}_n} \frac{\theta_k^s(z)}{z^{n+1}} \mathrm{d}z \\ &= S_1 + S_2. \end{aligned}$$

Es folgt sofort mit Satz 4.4.1, dass

$$|S_2| = \left| \int_{\mathfrak{m}_n} \frac{\theta_k^s(z)}{z^{n+1}} \mathrm{d}z \right| \leq \left(1 - \tfrac{1}{n}\right)^{-n-1} \ell(\Gamma_n) \sup\nolimits_{z\in\mathfrak{m}_n} |\theta_k(z)|^s = O(n^{a\kappa s+\varepsilon}). \quad (4.8.1)$$

Man beachte, dass wir den Wert s fixiert haben und sich das Landau-Symbol daher lediglich auf $n = 1, 2, 3, ...$ bezieht.

Bezüglich S_1 fixieren wir zunächst einen beliebigen major arc $\xi_{p,q}$ und folgern aus (4.6.1) für alle $z \in \xi_{p,q}$

$$\theta_k^s(z) = (\varphi_{p,q}(z) + \Phi_{p,q}(z))^s = \varphi_{p,q}^s(z) + O(\max(|\varphi_{p,q}^{s-1}(z)\Phi_{p,q}(z)|, |\Phi_{p,q}^s(z)|)).$$

Wir können damit das Integral über den betrachteten major arc auch schreiben als

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_{p,q}} \frac{\theta_k^s(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_{p,q}} \frac{\varphi_{p,q}^s(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z \\ &\quad + O\left(\underbrace{\int_{\xi_{p,q}} \frac{|\varphi_{p,q}^{s-1}(z)\Phi_{p,q}(z)|}{|z|^{n+1}}|\mathrm{d}z|}_{=\rho_{p,q}}\right) + O\left(\underbrace{\int_{\xi_{p,q}} \frac{|\Phi_{p,q}^s(z)|}{|z|^{n+1}}|\mathrm{d}z|}_{=\sigma_{p,q}}\right).\end{aligned}$$

Über einen zum Beweis von (4.8.1) analogen Herleitungsweg folgern wir mittels $\Phi_{p,q} = O(n^{a\kappa+\varepsilon})$ auf den major arcs, gezeigt in Satz 4.6.1 (4.6.6), dass

$$\sum_{(p,q)\in\mathcal{F}_N^*} \sigma_{p,q} = O(n^{sa\kappa+\varepsilon}). \tag{4.8.2}$$

Ferner folgt aus $\varphi_{p,q}(z) = 2\Gamma(1+a)S_{p,q}Y^{-a}$

$$\begin{aligned}\varphi_{p,q}(z) &= O(|S_{p,q}||Y|^{-a}) \\ &= O(q^{\kappa+\varepsilon}(q^k|\ell_n - \alpha i|)^{-a}) \\ &= O(q^{\kappa-1+\varepsilon}(\ell_n^2+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}a}).\end{aligned} \tag{4.8.3}$$

Mit (4.8.3), $\Phi_{p,q} = O(n^{a\kappa+\varepsilon})$ und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\alpha}{(\ell^2+\alpha^2)^r} = \ell^{1-2r}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}y}{(1+y^2)^r} = O(\ell^{1-2r})$$

für feste Werte $r > \frac{1}{2}$ und $\ell \longrightarrow 0^+$ erhalten wir eine Abschätzung für das Integral $\rho_{p,q}$. Drücken wir z wie oben in Termen des Winkels α aus, so finden wir eine obere Schranke, indem wir über alle reellen α integrieren.

$$\begin{aligned}\rho_{p,q} &= O\left(n^{a\kappa+\varepsilon}q^{(s-1)(\kappa-1)+\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\alpha}{(\ell_n^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}a(s-1)}}\right) \\ &= O\left(n^{a\kappa+as-a-1+\varepsilon}q^{(s-1)(\kappa-1)+\varepsilon}\right).\end{aligned}$$

Das innere Integral konvergiert, da wir $s > 2^k + 1 > k + 1$ vorausgesetzt hatten. Da die Doppelreihe

$$D(s) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{q-1} q^{(s-1)(\kappa-1)+\varepsilon} = \sum_{q=1}^{\infty} q^{(s-1)(\kappa-1)+1+\varepsilon}$$

für $s > 2^k + 1$ bzw. $(s-1)(1-\kappa) > 2$ absolut konvergiert[4] haben wir

$$\sum_{(p,q)\in\mathcal{F}_N^*} \rho_{p,q} = O\left(n^{a\kappa+as-a-1+\varepsilon}\right)$$

und damit

$$\sum_{(p,q)\in\mathcal{F}_N^*} \int_{\xi_{p,q}} \frac{|\varphi_{p,q}^{s-1}(z)\Phi_{p,q}(z)|}{|z|^{n+1}}|\mathrm{d}z| + \int_{\xi_{p,q}} \frac{|\Phi_{p,q}^{s}(z)|}{|z|^{n+1}}|\mathrm{d}z| = O\left(n^{sa\kappa+\varepsilon}\right) + O\left(n^{a\kappa+as-a-1+\varepsilon}\right).$$

Fügen wir die Integrale über major und minor arcs jetzt zusammen, können wir zusammen mit dem in (4.8.1) gefolgerten Fehlerterm $O(n^{sa\kappa+\varepsilon})$ für das Integral über die minor arcs unten stehende Ausdruck für die $r_{k,s}(n)$ ableiten:

$$r_{k,s}(n) = \sum_{(p,q)\in\mathcal{F}_N^*} \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi_{p,q}} \frac{\varphi_{p,q}^{s}(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z + O\left(n^{sa\kappa+\varepsilon}\right) + O\left(n^{a\kappa+as-a-1+\varepsilon}\right). \tag{4.8.4}$$

Wir wollen im oberen Integral die Funktion $\varphi_{p,q}^{s}(z)$ nun durch den Ausdruck $\mathrm{Li}_{1-as}(ze_q(-p))$ ersetzen und dafür Satz 4.7.2 heranziehen. Setzen wir

$$C := \frac{(2\Gamma(1+a))^s}{\Gamma(as)}$$

so erhalten wir

$$\sum_{(p,q)\in\mathcal{F}_N^*} \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi_{p,q}} \frac{\varphi_{p,q}^{s}(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z = \frac{C}{2\pi i} \sum_{(p,q)\in\mathcal{F}_N^*} \left(\frac{S_{p,q}}{q}\right)^s \int_{\xi_{p,q}} \frac{\mathrm{Li}_{1-as}(ze_q(-p))}{z^{n+1}}\mathrm{d}z + O\left(\sum_{(p,q)\in\mathcal{F}_N^*} q^{s(\kappa-1)+\varepsilon}\right).$$

Durch die Voraussetzung $s > 2^k + 1$ erhalten wir $s(1-\kappa) > 2 + \frac{1}{2^{k-1}}$, damit können wir

[4] wähle $\varepsilon > 0$ dann hinreichend klein

den oberen Fehlerterm wieder durch eine absolut konvergente Zeta-Reihe majorisieren.

$$O\left(\sum_{(p,q)\in\mathcal{F}_N^*} q^{s(\kappa-1)+\varepsilon}\right) = O\left(\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{q-1} q^{-s(1-\kappa)+\varepsilon}\right) = O\left(\sum_{q=1}^{\infty} q^{-1-\frac{1}{2^{k-1}}+\varepsilon}\right) = O(1),$$

für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein. Daher können wir diesen Fehlerterm vernachlässigen. Wir möchten das Integral über den Polylogarithmus nun gerne über die gesamte Kreislinie Γ_n ausführen, um den Residuensatz anwenden zu können. Dafür betrachten wir den Fehler, der durch Ersetzen von $\xi_{p,q}$ durch Γ_n im oberen Integral entsteht. Wir haben zunächst

$$\begin{aligned}&\frac{C}{2\pi i}\sum_{(p,q)\in\mathcal{F}_N^*}\left(\frac{S_{p,q}}{q}\right)^s\int_{\Gamma_n\setminus\xi_{p,q}}\frac{\mathrm{Li}_{1-as}(ze_q(-p))}{z^{n+1}}\mathrm{d}z\\ &= O\left(\sum_{(p,q)\in\mathcal{F}_N^*} q^{-s(1-\kappa)+\varepsilon}\int_{\Gamma_n\setminus\xi_{p,q}}|\mathrm{Li}_{1-as}(ze_q(-p))||\mathrm{d}z|\right).\end{aligned}$$

Es folgt mit $ze_q(-p) = \left(1-\frac{1}{n}\right)e^{i\alpha}$ und Korollar 4.7.7 für größer werdendes α

$$\mathrm{Li}_{1-sa}(ze_q(-p)) = O\left(\left|1-\left(1-\frac{1}{n}\right)e^{i\alpha}\right|^{-sa}\right) = O\left(\left(\frac{1}{n^2}+\alpha^2\right)^{-\frac{1}{2}sa}\right).$$

Wählen wir α_0 so, dass z auf dem Rand des major arcs $\xi_{p,q}$ liegt, folgt mit $q \leq n^a$ und der in Lemma 3.2.2 (ii) bewiesenen unteren Grenze für die Länge eines Teilbogens die Existenz einer Konstanten $A > 0$, sodass

$$n\alpha_0 > A\frac{n^a}{q} > A.$$

Damit können wir das obere Integral über zwei Integrale abschätzen, jedes bei einem der Bogenenden beginnend.

$$\int_{\Gamma_n\setminus\xi_{p,q}}|\mathrm{Li}_{1-as}(ze_q(-p))||\mathrm{d}z| = O\left(\int_{\alpha_0}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\alpha^2\right)^{-\frac{1}{2}sa}\mathrm{d}\alpha\right).$$

Wir führen die Substitution $\alpha = \frac{w}{n}$ durch und erhalten schließlich mit $n\alpha_0 > A\frac{n^a}{q}$:

$$= O\left(n^{sa-1}\int_{n\alpha_0}^{\infty}(1+w^2)^{-\frac{1}{2}sa}\mathrm{d}w\right) = O(n^{sa-1}(n\alpha_0)^{-sa+1}) = O\left(n^{sa-1}\left(\frac{n^a}{q}\right)^{-sa+1}\right).$$

Wir haben also folgenden Gesamtfehler:

$$O\left(n^{(sa-1)(1-a)}\sum_{(p,q)\in\mathcal{F}_N^*} q^{sa-1-s(1-\kappa)+\varepsilon}\right) = O\left(n^{(sa-1)(1-a)}\sum_{q\le n^a} q^{sa-s(1-\kappa)+\varepsilon}\right)$$

$$= O(n^{sa\kappa+2a-1+\varepsilon}) \overset{a<\frac{1}{2}}{=} O(n^{sa\kappa+\varepsilon}).$$

Es folgt also

$$r_{k,s}(n) = \frac{C}{2\pi i}\sum_{(p,q)\in\mathcal{F}_N^*}\left(\frac{S_{p,q}}{q}\right)^s \oint_{\Gamma_n}\frac{\mathrm{Li}_{1-sa}(ze_q(-p))}{z^{n+1}}\mathrm{d}z + O\left(n^{sa\kappa+\varepsilon}\right) + O\left(n^{a\kappa+as-a-1+\varepsilon}\right).$$

Da der Polylogarithmus $\mathrm{Li}_{1-sa}(ze_q(-p))$ ein in ganz $\mathbb{E}$ holomorphe Funktion mit Potenzreihenentwicklung

$$\mathrm{Li}_{1-sa}(ze_q(-p)) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{sa-1}e_q(-pn)z^n$$

darstellt, folgt mit dem Residuensatz

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n}\frac{\mathrm{Li}_{1-sa}(ze_q(-p))}{z^{n+1}}\mathrm{d}z = n^{sa-1}e_q(-np).$$

Durch einfaches Einsetzen folgt die Behauptung. □

Mit den uns erarbeiteten Abschätzungen können wir jetzt die Theoreme beweisen. Wir beginnen mit Theorem 1.0.3.

Beweis von Theorem 1.0.3. Nach Satz 4.8.1 haben wir

$$r_{k,s}(n) = Cn^{sa-1}\sum_{(p,q)\in\mathcal{F}_N^*}\left(\frac{S_{p,q}}{q}\right)^s e_q(-np) + O\left(n^{sa\kappa+\varepsilon}\right) + O\left(n^{a\kappa+as-a-1+\varepsilon}\right).$$

Wir zeigen jetzt, dass es asymptotisch gesehen keinen Unterschied macht, ob wir die Summe bis $q\le n^a$ oder bis $q=\infty$ laufen lassen. Wir erhalten für die Summendifferenz Δ unter Anwendung von Korollar 4.3.12

$$\Delta = O\left(n^{sa-1}\sum_{n^a<q} q^{-s(1-\kappa)+1+\varepsilon}\right) = O\left(n^{sa-1}(n^a)^{-s(1-\kappa)+2+\varepsilon}\right)$$

$$= O(n^{sa\kappa+2a-1+\varepsilon}) \overset{a<\frac{1}{2}}{=} O(n^{sa\kappa+\varepsilon}).$$

Also gilt

$$r_{k,s}(n) = \frac{(2\Gamma(1+a))^s}{\Gamma(sa)} n^{sa-1}\mathcal{S}_s(n) + O\left(n^{sa\kappa+\varepsilon}\right) + O\left(n^{a\kappa+as-a-1+\varepsilon}\right)$$

mit der singulären Reihe $\mathcal{S}_s(n)$. Da nach Satz 4.3.3 für alle hinreichend großen Werte s $\mathcal{S}_s(n) > \frac{1}{2}$ gilt, hat der erste Term für solche s mindestens die Ordnung n^{sa-1}. Der dritte Term besitzt immer kleinere Ordnung, da $a\kappa - a < 0$ und damit $a\kappa + as - a - 1 + \varepsilon < sa - 1$. Der zweite Term besitzt kleinere Ordnung für alle s, welche den Bedingungen

$$sa\kappa < sa - 1, \qquad sa(1-\kappa) > 1, \qquad \text{oder} \qquad s > kK = k2^{k-1}$$

genügen. Für hinreichend große s folgt demnach Theorem 1.0.3. □

Beweis von Theorem 1.0.2. Es folgt sofort aus Theorem 1.0.3, dass es für jedes k eine Zahl $G(k)$ gibt, sodass $r_{k,s}(n) > 0$ für alle $n \geq n_0$ und alle $s \geq G(k)$. Setzen wir nun $g = \max(G, n_0)$, so gilt $r_{k,s}(n) > 0$ für alle $n \geq 1$ und alle $s \geq g$, da jede Zahl unterhalb von n_0 als Summe von n_0 k-ten Potenzen geschrieben werden kann. Das Theorem folgt jetzt mit Korollar 4.2.5. □

5 Ausblick

Wir haben in dieser Arbeit das Waringsche Problem gelöst, ohne eine explizite obere Schranke für $g(k)$ oder $G(k)$ zu geben. Jedoch lässt der Beweis von Theorem 1.0.3. vermuten, dass eine solche durch $k2^{k-1}+1$ gegeben ist, also dass sich jede hinreichend große natürliche Zahl als Summe von 13 Kuben, 33 Biquadraten, 81 fünften Potenzen usw. schreiben lässt. Dies zu beweisen ist in der Tat möglich und erfordert, wenn mit den Mitteln dieser Arbeit fortgesetzt, eine detaillierte Untersuchung der singulären Reihe. An dieser Stelle sei auf weitere Arbeiten der *Some problems of „Partitio Numerorum“*-Reihe hingeweisen, unter anderem [HaLi2], in welcher die explizite obere Schranke $G(4) \leq 21$ gezeigt wird sowie [HaLi3].
Interessant ist, dass solch explizite Untersuchungen der Zahlen $g(k)$ und $G(k)$ durch die Hilbertsche Beweisführung in [Hil] nicht möglich sind. Dies demonstriert erneut die Fruchtbarkeit der Zirkelmethode für Problemlösungen aus der additiven Zahlentheorie.

Literaturverzeichnis

[Abel] N. H. Abel, *Untersuchungen über die Reihe* $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \cdots$, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 1 (1826), S. 311 – 331

[AmEs1] H. Amann, J. Escher, *Analysis I*, Birkhäuser Verlag, Dritte Auflage

[AmEs2] H. Amann, J. Escher, *Analysis III*, Birkhäuser Verlag, Zweite Auflage

[Apo] Tom. M. Apostol, *Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory*, Second Edition, Graduate Text in Mathematics (1997), Springer.

[Di] L. E. Dickson, *All integers except 23 and 239 are sums of eight cubes*, Bulletin of the American Mathematical Society 45 (1939), 588 – 591

[Frei1] Eberhard Freitag, *Differential- und Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen*, Vorlesungsskriptum

[Frei2] Eberhard Freitag, *Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher*, Vorlesungsskriptum

[FrBu] E. Freitag, R. Busam, *Funktionentheorie 1*, 4. Auflage, Springer (2006)

[HaLi] G. H. Hardy und J. E. Littlewood, *Some problems of 'Partio Numerorum' I: A new solution of Waring's problem*, Göttingen Nachrichten (1920), 33 – 54

[HaLi2] G. H. Hardy und J. E. Littlewood, *Some problems of 'Partio Numerorum' II: Proof that every large number is the sum of at most 21 biquadrates*, Mathematische Zeitschrift Göttingen (1920), S. 14 – 27

[HaLi3] G. H. Hardy und J. E. Littlewood, *Some problems of 'Partio Numerorum' IV: The singular series in Waring's problem and the value of the number* $G(k)$, Mathematische Zeitschrift Göttingen (1922), S. 161 – 188

[HaRa] G. H. Hardy und S. Ramanujan, *Asymptotic formulae in combinatory analysis*, Proceedings of the London Mathematical Society, 2, XVII (1918), S. 75 – 115

[HaWr] G. H. Hardy, E. M. Wright, *Einführung in die Zahlentheorie*, R. Oldenbourg, München (1958), S. 337 ff.

[Hil] David Hilbert, *Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl n^{ter} Potenzen (Waringsches Problem)*, Mathematische Annalen (1909), S. 281 – 300

[Kas1] Hendrik Kasten, Skriptum zur Vorlesung *Funktionentheorie 1*, Sommersemester 2014, Stand vom 29. Oktober 2014.

[Kas2] Hendrik Kasten, Skriptum zur Vorlesung *Funktionentheorie 2*, Wintersemester 2013, Stand vom 27. Februar 2014.

[Lan] Edmund Landau, *Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen*, Göttinger Nachrichten, 1912, S. 687 – 771

[Schei] Volker Scheidemann, *Introduction to complex analysis of several variables*, Birkhäuser Verlag, 2005

[Tit] E. C. Titchmarsh, *Introduction to the theory of Fourier integrals*, Oxford at the clarendon press, 1948

[Weyl] H. Weyl, *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins*, Mathematische Annalen, vol. 77 (1916), S. 313 – 352

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Ort, Datum

Johann Franke