

Allgemeiner gilt sogar

Satz 2. Seien $k > 0$, $\lambda > 0$ reelle Zahlen und $C \in \mathbb{C}^\times$. Sei $a(n)$ eine Folge sodass $a(n) = O(n^\alpha)$ für ein $\alpha > 0$. Sei

$$\begin{aligned} L(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}, \\ L^*(s) &= \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \Gamma(s)L(s), \\ f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a(n)e^{2\pi i n z/\lambda}. \end{aligned}$$

Dann sind äquivalent:

- (i) $f(-1/z) = C(z/i)^k f(z)$ für alle $z \in \mathbb{H}$.
- (ii) $L^*(s) + \frac{a(0)}{s} + \frac{Ca(0)}{k-s}$ hat holomorphe Fortsetzung, ist beschränkt in $\nu_1 \leq \operatorname{Re}(s) \leq \nu_2$ und es gilt

$$L^*(k-s) = CL^*(s).$$

Beispiel: Theta-Transformationsformel: $A \in M_m(\mathbb{R})$, $A = A^t$, $A > 0$, setze

$$\vartheta_A(z) = \sum_{g \in \mathbb{Z}^m} e^{\pi i A[g]z}, \quad z \in \mathbb{H}.$$

Dann gilt

$$\vartheta_{A^{-1}}(-1/z) = \sqrt{\det A} (z/i)^{m/2} \vartheta_A(z).$$

Ist speziell $m = 1$ und $A = 1$, so folgt

$$\vartheta_1(z) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{\pi i n^2 z}.$$

Sei $f = \frac{1}{2}\vartheta_1$. Dann gilt

$$f(-1/z) = (z/i)^{1/2} f(z).$$

Man wende nun Satz 2 auf f mit den Parametern $k = \frac{1}{2}$, $\lambda = 2$ und $C = 1$, also $a(0) = \frac{1}{2}$. Dann

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (n^2)^{-s} = \zeta(2s).$$

Es folgt $\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s) + \frac{1}{2s} + \frac{1}{1-2s}$ hat holomorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$, ist beschränkt auf Vertikalstreifen $\nu_1 \leq \operatorname{Re}(s) \leq \nu_2$ und es gilt die Funktionalgleichung unter $s \mapsto \frac{1}{2} - s$. Hieraus erhält man die schon bekannten analytischen Eigenschaften von $\zeta(s)$, üblicherweise formuliert wie folgt: $\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ hat holomorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, einfache Pole in $s = 0$ und $s = 1$ und ist invariant unter $s \mapsto 1 - s$.

§7 L -Reihen zu Hecke Eigenformen

Satz 1. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n \in M_k$ Eigenform aller $T(n)$ und $f|T(n) = \lambda(n)f$. Dann hat $L(f, s)$ ein Euler-Produkt der Gestalt

$$L(f, s) = a(1) \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - \lambda(p)p^{-s} + p^{k-1-2s})^{-1}.$$

Die rechte Seite konvergiert unbedingt für $\sigma > k$ bzw. $\sigma > \frac{k}{2} + 1$ falls $f \in S_k$.

Beweis: Schon gezeigt: $a(n) = \lambda(n)a(1)$ für alle $n \geq 1$. Ferner $T(m)T(n) = T(mn)$ für $(m, n) = 1$. Also ist $\lambda(n)$ multiplikativ! Daher gilt die Formel

$$L(f, s) = a(1) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n)n^{-s} = a(1) \prod_{p \in \mathbb{P}} \sum_{r=0}^{\infty} \lambda(p^r)p^{-rs}.$$

Behauptung:

$$(1 - \lambda(p)X + p^{k-1}X^2) \sum_{r=0}^{\infty} \lambda(p^r)X^r = 1.$$

Das folgt unmittelbar aus der Formel $\lambda(p^r) - \lambda(p)\lambda(p^{r-1}) + p^{k-1}\lambda(p^{r-2}) = 0$ für alle $r \geq 2$ und Koeffizientenvergleich. Die Behauptung folgt mit $X = p^{-s}$. $\square$

§8 Spezielle Werte von L -Funktionen

Erinnerung: Es sei $f \in S_k$ normalisierte Hecke-Eigenform. Dann ist $L^*(f, s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(f, s)$ ganze Funktion und $(-1)^{k/2}$ -invariant unter $s \mapsto k - s$. Ferner gilt

$$L(f, s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - a(p)p^{-s} + p^{k-1-2s})^{-1}.$$

Definition: Eine ganze Zahl s_0 heißt „kritisch“ bezüglich $L(f, s)$, falls $1 \leq s_0 \leq k - 1$. Idee: s_0 ist genau dann kritisch, falls es weder Pol von $\Gamma(s)$ noch von $\Gamma(k - s)$. Es gibt folgende Philosophie von Deligne: sei

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}$$

eine „motiviert“ Dirichletreihe (d.h. L kommt von einem natürlichen mathematischen Objekt wie einer Varietät, einer Modulform, einer Galois-Darstellung, einem Zahlkörper, ...). Man setzt voraus, dass L ein Euler-Produkt besitzt und sich zu einer ganzen Funktion fortsetzen lässt (oder zumindest meromorph mit endlich vielen Polstellen) und ihre Vervollständigung $L^*(s) = \gamma(s)L(s)$ (mit einem Gamma-Faktor $\gamma(s)$) eine Funktionalgleichung $L^*(k - s) = \varepsilon L^*(s)$ erfüllt mit $k > 0$ und $\varepsilon \in \{\pm 1\}$. Ist s_0 kritisch, so ist es weder Pol von $\gamma(s)$ noch $\gamma(k - s)$. Dann soll seine geschlossene Formel gelten:

$$L^*(s_0) = B(s_0)\Omega$$

mit $B(s_0) \in \overline{\mathbb{Q}}$ und Ω „im Wesentlichen unabhängig von s_0 “ („Periode“).

Beispiel: $\zeta(s)$. Dann sind genau die positiven geraden und die negativen ungeraden Zahlen kritisch.

Satz (Eichler-Shimura). Sei $f \in S_k$ eine Hecke-Eigenform. Dann existieren $\omega_+, \omega_- \in \mathbb{R}_+$ derart, dass die Werte $L^*(f, s_0)/\omega_+$ für s_0 kritisch und ungerade und $L^*(f, s_0)/\omega_-$ für s_0 kritisch und gerade, algebraisch sind. Man kann f so normalisieren dass

$$\omega_+ \omega_- = \langle f, f \rangle.$$

Beispiel: Ist $f = \Delta \in S_{12}$, so gilt

$$\begin{aligned} L^*(\Delta, 1) &= L^*(\Delta, 11) = \frac{192}{691} \omega_+, \\ L^*(\Delta, 3) &= L^*(\Delta, 9) = \frac{16}{135} \omega_+, \\ L^*(\Delta, 5) &= L^*(\Delta, 7) = \frac{8}{105} \omega_+. \end{aligned}$$

Ähnlich für ω_- .