Auflösung von Singularitäten

Wintersemester 2014/15

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. A. Holschbach

Übungsblatt 4
zu bearbeiten bis Montag, 17.11.2014

Aufgabe 1. *(Ordnungen und Aufblasungen von Kurven)*
Sei S eine nicht-singuläre Fläche über einem Körper k, $C \subset S$ eine Kurve und $p \in S$ ein Punkt. Sei $\pi : \tilde{S} \to S$ die Aufblasung von S in p, $\tilde{C}$ die strikte Transformation von C und E der exzeptionelle Divisor von π. Zeige:

$$\sum_{q \in \tilde{C} \cap E} [k(q) : k(p)] \operatorname{ord}_q \tilde{C} \leq \operatorname{ord}_p C.$$

Aufgabe 2. *(Auflösung von Singularitäten für Kurven über beliebigen Körpern)*
Sei k ein Körper und X eine Kurve über k. Zeige:

(a) Ist $\pi : \tilde{X} \to X$ die Aufblasung von X in einem abgeschlossenen Punkt p, so ist π ein endlicher und damit affiner Morphismus. Der Garbenhomomorphismus $\mathcal{O}_X \to \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ ist injektiv; er ist genau dann ein Isomorphismus, wenn π dies ist, und letzteres ist genau dann der Fall, wenn p ein nicht-singulärer Punkt von X ist.

(b) Wir definieren den Auflösungsalgorithmus für $X_0 = X$ rekursiv wie folgt: Ist X_{n-1} singulär, so sei $\pi_n : X_n \to X_{n-1}$ die Aufblasung von X_{n-1} im singulären Ort. Zeige, dass $\mathcal{F}_n := \operatorname{coker}(\mathcal{O}_{X_{n-1}} \to \pi_{n*}\mathcal{O}_{X_n})$ eine Wolkenkratzergarbe ist. Folgere, dass die Folge der Euler-Charakteristiken $\chi(X_n, \mathcal{O}_{X_n})$ monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, und benutze nun (a), um zu folgern, dass die Aufblasungen nach endlich vielen Schritten mit einer nicht-singulären Kurve abbrechen.

In den folgenden beiden Aufgaben verstehen wir unter einer *Auflösung von Singularitäten* einer Varietät X über einem Körper k einen eigentlichen birationalen Morphismus $\tilde{X} \to X$ von einer nicht-singulären Varietät $\tilde{X}$ über k auf X.

Aufgabe 3. *(Auflösung von Unbestimmtheiten)*
Sei $\phi : X \dashrightarrow Y$ eine rationale Abbildung zwischen eigentlichen Varietäten über einem Körper k. Unter einer *Auflösung von Unbestimmtheiten* von ϕ verstehen wir eine eigentliche nicht-singuläre k-Varietät X' zusammen mit einem birationalen Morphismus $\psi : X' \to X$ und einem Morphismus $\lambda : X' \to Y$, so dass $\lambda = \phi \circ \psi$. Benutze den Graphen von ϕ, um zu zeigen, dass aus der Auflösung von Singularitäten für Varietäten über k die Auflösung von Unbestimmtheiten für rationale Abbildungen zwischen eigentlichen k-Varietäten folgt.

Aufgabe 4. *(Hyperflächen, Prinzipalisierung und Auflösung von Singularitäten)*
Sei W eine nicht-singuläre Varietät über einem Körper k und $\mathcal{I}$ eine Idealgarbe auf W. Unter einer *Prinzipalisierung von* $\mathcal{I}$ verstehen wir einen eigentlichen birationalen Morphismus $\phi : W' \to W$, so dass W' nicht-singulär und $\phi^{-1}\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{W'}$ lokal von einem Element erzeugt ist.

Sei k ein perfekter Körper und $n \in \mathbb{N}_0$. Angenommen, die Auflösung von Singularitäten existiere für projektive Hyperflächen über k der Dimension n, und die Prinzipalisierung von Idealen sei für nicht-singuläre Varietäten über k der Dimension n möglich. Zeige, dass dann die Auflösung von Singularitäten für beliebige quasi-projektive k-Varietäten der Dimension n möglich ist.

Hinweis. Sei V eine quasi-projektive k-Varietät der Dimension n. Zeige zunächst, dass man V oBdA als irreduzibel und projektiv annehmen kann. Wähle dann man eine separable Transzendenzbasis von $k(V)$ und benutze den Satz vom primitiven Element, um eine zu V birationale projektive Hyperfläche $\overline{V} \subset \mathbb{P}_k^{n+1}$ zu finden. Sei Γ_ϕ der Graph der birationalen Abbildung $\phi : V \dashrightarrow \overline{V}$. Verwende nun obige Annahmen und Satz 2.9, um eine Auflösung von Singularitäten für Γ_ϕ und damit für V zu finden.