Auflösung von Singularitäten

Wintersemester 2014/15

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. A. Holschbach

Übungsblatt 2
zu bearbeiten bis Dienstag, 04.11.2014

Aufgabe 1. *(Aufblasung und Faserprodukt)*
Sei $f : X' \to X$ ein Morphismus von noetherschen Schemata, $Y \subset X$ ein abgeschlossenes Unterschema und $Y' = f^{-1}(Y) \subset X'$. Sei $\tilde{X} \to X$ die Aufblasung von X entlang Y, $Z = X' \times_X \tilde{X}$ das Faserprodukt von X' und $\tilde{X}$ über X mit kanonischem Morphismus $\mathrm{pr}_1 : Z \to X'$. Zeige: Ist W der Abschluss von $\mathrm{pr}_1^{-1}(X' \setminus Y')$ in Z, so ist $\mathrm{pr}_1|_W : W \to X'$ die Aufblasung von X' entlang Y'.

Aufgabe 2. *(Aufblasung eines gewöhnlichen Doppelpunktes)*
Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\mathrm{char}(k) \neq 2$ und X eine Varietät über k. Ein Punkt $p \in X$ heißt ein *gewöhnlicher Doppelpunkt*, falls die Vervollständigung des lokalen Rings $\mathcal{O}_{X,p}$ von der Form

$$\hat{\mathcal{O}}_{X,p} \cong k[\![x_0, \dots, x_n]\!]/(x_0^2 + \ldots + x_n^2) \qquad \text{mit } n \geq 1$$

ist (im Fall $n = 1$ nennt man dies auch einen *Knoten*).[1] Angenommen, X ist nicht-singulär außerhalb p und hat einen gewöhnlichen Doppelpunkt in p. Sei $\tilde{X} \to X$ die Aufblasung von X in p. Zeige:

(a) $\tilde{X}$ ist nicht-singulär.

(b) Sei $Y \subset X$ ein beliebige nicht-singuläre Untervarietät der Dimension $n - 1$ mit $p \in Y$. Dann ist die Aufblasung von X entlang Y nicht-singulär.

Aufgabe 3. *(Aufblasung entlang eines Koordinatenkreuzes I)*
Sei k ein Körper mit $\mathrm{char}(k) \neq 2$ und L, M die Geraden $V(x, y)$, $V(x, z)$ in $\mathbb{A}^3_k = \mathrm{Spec}\, k[x, y, z]$. Sei $X \to \mathbb{A}^3_k$ die Aufblasung von $\mathbb{A}^3_k$ entlang $N = L \cup M = V(x, yz)$. Zeige:

(a) Für jedes $p \in N$ ist die Faser X_p isomorph zu $\mathbb{P}^1_{k_p}$.

(b) X ist singulär: Es enthält einen gewöhnlichen Doppelpunkt.

Aufgabe 4. *(Aufblasung entlang eines Koordinatenkreuzes II)*
Wir benutzen weiter die Notation aus Aufgabe 3. Sei $Y \to \mathbb{A}^3_k$ die Aufblasung von $\mathbb{A}^3_k$ entlang L und $X' \to Y$ die Aufblasung von Y entlang der strikten Transformierten $\tilde{M} \subset Y$ von M. Analog sei $Z \to \mathbb{A}^3_k$ die Aufblasung von $\mathbb{A}^3_k$ entlang M und $X'' \to Z$ die Aufblasung von Z entlang der strikten Transformierten $\tilde{L} \subset Z$ von L. Zeige:

(a) Die zusammengesetzten Morphismen $X' \to \mathbb{A}^3_k$, $X'' \to \mathbb{A}^3_k$ faktorisieren über $X \to \mathbb{A}^3_k$.

(b) X' und X'' sind nicht isomorph als X-Schemata, d.h. die Kommutatorregel gilt nicht für Aufblasungen entlang strikter Transformierten.

---

[1] Ist k ein beliebiger Körper der Charakteristik $\neq 2$, so heiße $p \in X$ gewöhnlicher Doppelpunkt, wenn alle darüberliegende Punkte in dem Basiswechsel $X_{\bar{k}}$ über einem algebraischen Abschluss $\bar{k}$ von k diese Eigenschaft haben.