Fundamentalgruppen algebraischer Kurven

Wintersemester 2013/14

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. A. Holschbach

Übungsblatt 9
zu bearbeiten bis Dienstag, 07.01.2014

Aufgabe 1. *(Galoisüberlagerungen und Kategorienäquivalenz)*
Sei $\phi : Y \to X$ eine verzweigte Überlagerung kompakter Riemannscher Flächen (bzw. ein dominanter Morphismus zwischen normalen projektiven Kurven), und sei $G = \mathrm{Aut}(Y|X)$ die Gruppe der Automorphismen von Y über X, genannt *Galoisgruppe* von ϕ. Analog zum topologischen Kontext nennen wir $\phi : Y \to X$ *verzweigte Galoisüberlagerung*, wenn G transitiv auf allen Fasern operiert. Zeigen Sie:

(a) Für offenes $U \subset X$ induziert jedes $g \in G$ einen Automorphismus g^* auf $\mathcal{O}_Y(\phi^{-1}(U))$. $\phi : Y \to X$ ist genau dann galoissch, wenn für jedes offene U die Abbildung

$$\phi^* : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_Y(\phi^{-1}(U))^G := \{f \in \mathcal{O}_Y(\phi^{-1}(U)) \mid g^* f = f \ \forall\, g \in G\}$$

ein Isomorphismus ist.

(b) Die Funktoren in der Kategorienäquivalenz in Korollar 6.8 bilden (verzweigte) Galoisüberlagerungen im topologischen, komplex-analytischen und algebraisch-geometrischen Sinne sowie Galoiserweiterungen von Körpern aufeinander ab. Dabei bleibt die Galoisgruppe erhalten.

Aufgabe 2. *(Satz von Lüroth)*

(a) Zeigen Sie, dass jede kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht 0 isomorph zu $\overline{\mathbb{C}}$ ist.

(b) Zeigen Sie: Ist $f : \overline{\mathbb{C}} \to X$ eine verzweigte Überlagerung kompakter Riemannscher Flächen, so gilt $X \cong \overline{\mathbb{C}}$. Folgern Sie, dass jeder Körper K mit $\mathbb{C} \subsetneq K \subset \mathbb{C}(t)$ isomorph zu $\mathbb{C}(t)$ ist.

Aufgabe 3. *(Abbildungen zwischen elliptischen Kurven)*
Zeigen Sie: Jede holomorphe Abbildung zwischen elliptischen Kurven ist entweder konstant oder eine endliche (surjektive) unverzweigte Überlagerung. Letztere werden *Isogenien* genannt.

Aufgabe 4. *(Zyklizität des Stabilisators)*
Sei $\phi : Y \to X$ eine verzweigte Galoisüberlagerung Riemannscher Flächen mit Galoisgruppe G. Sei $y \in Y$ ein Punkt und $G_y \subset G$ der Stabilisator von y. Zeigen Sie: Es gibt Karten $f : U \to \mathbb{C}$, $h : V \overset{\text{def}}{=} \phi(U) \to \mathbb{C}$ von Umgebungen U von y und V von $x = \phi(y)$ mit

- $f(y) = 0 = h(x)$ und $f(U) = h(V) = \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$,
- $h \circ \phi \circ f^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D},\ z \mapsto z^{e_y}$ mit $e_y = e(y|x)$,
- U ist G_y-stabil, und es gilt $\phi^{-1}(V) = \dot{\bigcup}_{\bar{g} \in G/G_y} gU$.

Folgern Sie: Es gilt $\# G_y = e_y$, und G_y ist zyklisch.

Das eindeutig bestimmte Element $g_y \in G_y$ mit $f \circ g_y \circ f^{-1}(z) = e^{2\pi i/e_y} z$ heißt *ausgezeichnetes Element zu y*.

Aufgabe 5*. *(Endliche Gruppen als Galoisgruppen über $\overline{\mathbb{C}}$ mit vorgegebener Verzweigung)*
Gegeben sei eine endliche Gruppe G und Erzeuger $g_1, \dots, g_r \in G$ mit $g_1 \cdots g_r = 1$. Zeigen Sie: Zu jeder Wahl von paarweise verschiedenen Punkten $x_1, \dots, x_r \in \overline{\mathbb{C}}$ existiert verzweigte Galoisüberlagerung $\phi : Y \to \overline{\mathbb{C}}$ mit folgenden Eigenschaften:

- ϕ verzweigt nur über $x_1, \dots, x_r$.
- Die Galoisgruppe von $\phi : Y \to \overline{\mathbb{C}}$ ist G, und für jedes x_i $(i = 1, \dots, r)$ gibt es ein $y_i \in \phi^{-1}(x_i)$ mit ausgezeichnetem Element $g_{y_i} = g_i$.