Fundamentalgruppen algebraischer Kurven

Wintersemester 2013/14

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. A. Holschbach

Übungsblatt 7
zu bearbeiten bis Dienstag, 10.12.2013

Aufgabe 1. *(Übertragung der komplexen Struktur bei Überlagerungen)*
Sei X eine Riemannsche Fläche und $\phi : Y \to X$ eine (unverzweigte) Überlagerung von X durch einen (nicht-leeren) zusammenhängenden topologischen Raum Y. Zeigen Sie, dass es eine eindeutig bestimmte komplexe Struktur auf Y gibt, so dass $\phi : Y \to X$ eine holomorphe Abbildung zwischen Riemannschen Flächen ist.

Aufgabe 2. *(Übertragung der komplexen Struktur unter Quotientenbildung I)*
Sei Y eine Riemannsche Fläche und G eine Untergruppe der Gruppe $\mathrm{Aut}(Y)$ der (holomorphen) Automorphismen von Y. Die Wirkung $G \times Y \to Y, (g, y) \mapsto g(y)$, heißt *frei*, wenn jeder Automorphismus $g \in G$ mit $g \neq \mathrm{id}$ fixpunktfrei ist. Sie heißt *eigentlich diskontinuierlich*, wenn es zu jedem Paar (x, y) von Punkten in Y Umgebungen U von x und V von y gibt, so dass $\#\{g \in G \mid g(U) \cap V \neq \varnothing\} < \infty$.

Angenommen, $G \subset \mathrm{Aut}(Y)$ operiert frei und eigentlich diskontinuierlich auf Y. Zeigen Sie: Der Bahnenraum $G\backslash Y$ mit seiner Quotiententopologie ist hausdorffsch, und er lässt sich auf eindeutige Weise mit einer komplexen Struktur versehen, so dass die kanonische Projektion $p : Y \to G\backslash Y$ eine (unverzweigte) holomorphe Überlagerungsabbildung zwischen Riemannschen Flächen ist.

Aufgabe 3. *(Übertragung der komplexen Struktur unter Quotientenbildung II)*
Sei Y eine Riemannsche Fläche und G eine endliche Untergruppe von $\mathrm{Aut}(Y)$. Zeigen Sie: Der Bahnenraum $G\backslash Y$ ist hausdorffsch und lässt sich auf eindeutige Weise mit einer komplexen Struktur versehen, so dass die kanonische Projektion $p : Y \to G\backslash Y$ eine verzweigte holomorphe Überlagerungsabbildung zwischen Riemannschen Flächen ist.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst: Zu jedem Punkt $y \in Y$ existiert eine Karte $f : U \to \mathbb{C}$ von einer Umgebung U von y mit folgenden Eigenschaften:

- $g(U) = U$ für alle g im Stabilisator G_y von y,
- $g(U) \cap U = \varnothing$ für $g \notin G_y$,
- G_y wirkt frei auf $U \setminus \{y\}$.

Konstruieren Sie eine Karte $G_y\backslash U \to \mathbb{C}$ und benutzen Sie dies, um einen Atlas auf $G\backslash Y$ zu definieren.

Aufgabe 4*. *(Modulare Kurven)*
Sei $\mathbb{H}$ die obere Halbebene und Γ eine diskrete Untergruppe von $\mathrm{PSl}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$. Zeigen Sie: Der Bahnenraum $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ lässt sich eindeutig mit einer komplexen Struktur versehen, so dass $p : \mathbb{H} \to \Gamma\backslash\mathbb{H}$ eine verzweigte Überlagerung Riemannscher Flächen ist. Insbesondere ist $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ für jede Untergruppe Γ von $\mathrm{PSl}_2(\mathbb{Z})$ eine Riemannsche Fläche.

Hinweis: Kombinieren Sie die Ergebnisse von Aufgaben 2 und 3.