Fundamentalgruppen algebraischer Kurven

Wintersemester 2013/14

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. A. Holschbach

Übungsblatt 1
zu bearbeiten bis Dienstag, 29.10.2013

Aufgabe 1. *(Eine ebene Kurve)*
Sei Z die ebene Kurve $Z = V(Y^2 - X^3) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$. Zeigen Sie:

(a) Die Projektionen von Z auf die Koordinatenachsen $L_1 = V(Y)$ und $L_2 = V(X)$ sind surjektive Morphismen von algebraischen Teilmengen. Geben Sie die zugehörigen Homomorphismen zwischen den Koordinatenringen an.

(b) Der Ringhomomorphismus $\mathbb{C}[X, Y] \to \mathbb{C}[T], \quad X \mapsto T^2,\ Y \mapsto T^3$, faktorisiert über $\mathcal{O}(Z)$. Der induzierte Morphismus $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \to Z$ ist ein Homöomorphismus, aber kein Isomorphismus algebraischer Mengen.

Aufgabe 2. *(Irreduzible Teilmengen des $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$)*

(a) Seien $f, g \in \mathbb{C}[X, Y]$ zwei teilerfremde Polynome. Zeigen Sie, dass $V(f, g)$ nur aus endlich vielen abgeschlossenen Punkten besteht.

Hinweis: Betrachten Sie den größten gemeinsamen Teiler von f und g in $\mathbb{C}(X)[Y]$ und zeigen Sie, dass es $a, b \in \mathbb{C}[X, Y]$ gibt mit $0 \neq af + bg \in \mathbb{C}[X]$; folgern Sie daraus die Behauptung.

(b) Zeigen Sie: Die einzigen irreduziblen algebraischen Teilmengen des $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ sind $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$, Ein-Punkt-Mengen und ebene Kurven der Form $V(f)$ mit $f \in \mathbb{C}[X, Y]$ irreduzibel.

Aufgabe 3. *(Noethersche Räume)*
Ein topologischer Raum X heißt *noethersch*, wenn jede absteigende Folge von abgeschlossenen Teilmengen $V_1 \supseteq V_2 \supseteq \ldots$ stationär wird, d. h. es existiert eine Zahl r, so dass $V_r = V_{r+1} = \ldots$. Zeigen Sie:

(a) Jede algebraische Teilmenge $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ ist noethersch.

(b) Jede algebraische Teilmenge $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ lässt sich als Vereinigung endlich vieler irreduzibler algebraischer Teilmengen $X_1, \ldots, X_r$ schreiben. Fordert man zusätzlich $X_i \not\subseteq X_j$ für $i \neq j$, so ist diese Zerlegung eindeutig.

Aufgabe 4. *(Produkte algebraischer Mengen)*
Seien $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}, Y \subseteq \mathbb{A}^m_{\mathbb{C}}$ zwei algebraische Teilmengen. Wir definieren ihr *Produkt* als die Menge

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\} \subseteq \mathbb{A}^{n+m}_{\mathbb{C}}.$$

Zeigen Sie:

(a) $X \times Y$ ist eine algebraische Teilmenge von $\mathbb{A}^{n+m}_{\mathbb{C}}$; sie trägt im Allgemeinen <u>nicht</u> die Produkttopologie von X und Y (dies ist bereits für $X = Y = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ falsch). Es gilt

$$\mathcal{O}(X \times Y) \cong (\mathcal{O}(X) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(Y))_{\mathrm{red}}.$$

(b*) Sind X und Y irreduzibel, so auch $X \times Y$; in diesem Fall gilt $\mathcal{O}(X \times Y) \cong \mathcal{O}(X) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(Y)$.

Hinweis: Es reicht zu zeigen, dass $\mathcal{O}(X) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(Y)$ nullteilerfrei ist. Für $\alpha, \alpha' \in \mathcal{O}(X) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(Y)$ mit $\alpha\alpha' = 0$ schreibe man $\alpha = \sum_{i=1}^r a_i \otimes b_i$, $\alpha' = \sum_{i=1}^r a'_i \otimes b_i$ mit $\mathbb{C}$-linear unabhängigen $b_1, \ldots, b_r \in \mathcal{O}(Y)$. Für jeden Punkt $x \in X$ gilt dann $\bar{\alpha}\bar{\alpha}' = 0$ in $\mathcal{O}(X)/\mathfrak{m}_x \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(Y) \cong \mathcal{O}(Y)$, wegen der Irreduzibilität von Y also $\bar{\alpha} = 0$ oder $\bar{\alpha}' = 0$. Folgern Sie, dass gilt: $X = V(a_1, \ldots, a_r) \cup V(a'_1, \ldots, a'_r)$, und nutzen Sie nun die Irreduzibilität von X.