Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie II

Sommersemester 2011

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. A. Holschbach

Blatt 14
keine Abgabe

Aufgabe 1. Sei $L|K$ eine endliche unverzweigte Galoiserweiterung nicht-archimedischer lokaler Körper, und sei $F \in G = G(L|K)$ das Frobenius-Element. Zeigen Sie: Für jedes $a \in K^\times$ gilt

$$(a, L|K) = F^{v_K(a)}.$$

Hinweis. Verwenden Sie 5.9 und die Konstruktion von $\mathrm{inv}_{L|K}$ im unverzweigten Fall, um zu zeigen: Für jedes $\chi \in H^1(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ gilt $\chi((a, L|K)) = \chi(F^{v_K(a)})$. (An einer Stelle hilft die Beziehung $\bar{v}_K(a \cup \delta\chi) = v_K(a) \cdot \delta\chi$, die sich aus 4.29 und der Natürlichkeit des Cup-Produkts ergibt.)

Aufgabe 2. Bestimmen Sie alle abelschen Erweiterungen von $\mathbb{Q}_3$ vom Grad 3.

Hinweis. Betrachten Sie den Körper $M = \mathbb{Q}_3(\zeta_{234}) = \mathbb{Q}_3(\zeta_{3^2}) \cdot \mathbb{Q}_3(\zeta_{3^3-1})$ und zeigen Sie, dass $G(M|\mathbb{Q}_3) \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Daher enthält M einen eindeutig bestimmten Unterkörper L mit $G(L|\mathbb{Q}_3) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Folgern Sie, dass $(\mathbb{Q}_3^\times)^3 \subset I_L$. Bestimmen Sie $\mathbb{Q}_3^\times/(\mathbb{Q}_3^\times)^3$ und begründen Sie, warum L die maximale abelsche Erweiterung von $\mathbb{Q}_3$ vom Exponenten 3 ist. Alle gesuchten Erweiterungen ergeben sich dann als Unterkörper von L.

Aufgabe 3. Sei p eine Primzahl, $K|\mathbb{Q}_p$ eine endliche Erweiterung vom Grad n.

(a) Sei

$$\widehat{K}^\times = \varprojlim_I K^\times/I,$$

wobei $I \subset K^\times$ alle (offenen) Untergruppen vom endlichen Index durchläuft. Zeigen Sie: Das universelle Normrestsymbol induziert einen Isomorphismus

$$\widehat{K}^\times \xrightarrow{\sim} G_K^{\mathrm{ab}}.$$

(b) Zeigen Sie: Es gilt

$$G_K^{\mathrm{ab}} \cong \widehat{\mathbb{Z}} \times \mu(K) \times \mathbb{Z}_p^n.$$

Hinweis. Verwenden Sie Satz 2.53.

Aufgabe 4. Sei K ein nicht-archimedischer lokaler Körper, K^{nr} seine maximale unverzweigte und K^{ab} seine maximale abelsche Erweiterung, und sei $F \in G(K^{\mathrm{nr}}|K)$ der Frobeniusautomorphismus. Für eine Uniformisierende π von K bezeichne K_π den Fixkörper von K^{ab} unter $(\pi, \overline{K}|K) \in G(K^{\mathrm{ab}}|K)$. Zeigen Sie:

(a) Für jede Uniformisierende $\pi \in K$ gilt

$$K_\pi \cdot K^{\mathrm{nr}} = K^{\mathrm{ab}} \qquad \text{und} \qquad K_\pi \cap K^{\mathrm{nr}} = K,$$

also insbesondere

$$G(K^{\mathrm{ab}}|K) \cong G(K_\pi|K) \times G(K^{\mathrm{nr}}|K).$$

Hinweis. Es sei $H = G(K^{\mathrm{ab}}|K_\pi)$ der Abschluss der von $\sigma = (\pi, \overline{K}|K)$ erzeugten Untergruppe von $G(K^{\mathrm{ab}}|K)$. Zeigen Sie mit Aufgabe 1, dass die kanonische Projektion $G(K^{\mathrm{ab}}|K) \to G(K^{\mathrm{nr}}|K)$ einen Isomorphismus $H \xrightarrow{\sim} G(K^{\mathrm{nr}}|K)$, $\sigma \mapsto F$, induziert.

(b) Ist L ein Körper mit $L \cdot K^{\mathrm{nr}} = K^{\mathrm{ab}}$ und $L \cap K^{\mathrm{nr}} = K$, so gibt es eine eindeutig bestimmte Uniformisierende $\pi \in K$ mit $L = K_\pi$.

Hinweis. Sei $H = G(K^{\mathrm{ab}}|L)$. Dann enthält H ein eindeutig bestimmtes Element σ mit $\sigma|_{K^{\mathrm{nr}}} = F$. Zeigen Sie mit Aufgabe 1 und 5.21, dass das universelle Normrestsymbol die Menge der Uniformisierenden von K isomorph auf die Menge solcher σ abbildet.

(c) Ist p eine Primzahl, $K = \mathbb{Q}_p$, so zeigen Sie, dass $L = \bigcup_n \mathbb{Q}_p(\mu_{p^n}) =: \mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$ die in (b) beschriebenen Eigenschaften besitzt. Bestimmen Sie dass zugehörige $\pi \in K$.

Hinweis. Die erste Aussage folgt aus der Verzweigungstheorie und dem lokalen Satz von Kronecker-Weber. Für die zweite verwenden Sie 5.22.

Aufgabe 5*. Sei p eine Primzahl. Wir wollen untersuchen, inwieweit eine endliche Erweiterung $K|\mathbb{Q}_p$ durch die abelisierte absolute Galoisgruppe G_K^{ab} von K festgelegt ist. Seien dazu K_1 und K_2 zwei endliche Erweiterungen von $\mathbb{Q}_p$. Zeigen Sie:

(a) $G_{K_1}^{\mathrm{ab}}$ und $G_{K_2}^{\mathrm{ab}}$ sind als abstrakte topologische Gruppen genau dann isomorph, wenn

$$[K_1 : \mathbb{Q}_p] = [K_2 : \mathbb{Q}_p] \qquad \text{und} \qquad \mu(K_1) = \mu(K_2).$$

Sei nun $G_{K_1}^{\mathrm{ab}} \cong G_{K_2}^{\mathrm{ab}}$. Dann haben K_1 und K_2 auch den gleichen absoluten Verzweigungsindex e und absoluten Trägheitsgrad f, und die maximalen unverzweigten Teilkörper von K_1 und K_2 stimmen überein. Enthält einer der beiden Körper eine p-te Einheitswurzel, so auch der andere, und es gilt $K_1 \cap \mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty}) = K_2 \cap \mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$.

Hinweis. Die erste Aussage folgt leicht aus Aufgabe 3 (als Zwischenschritt zeige man, dass die maximale pro-p-Untergruppe von G_K^{ab} den $\mathbb{Z}_p$-Rang $[K : \mathbb{Q}_p] + 1$ hat). Den Wert von f entnehme man aus $\mu(K)$ und schließe auf e und $K \cap \mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}$. Zuletzt verwende man, dass alle Zwischenkörper von $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})|\mathbb{Q}_p(\mu_p)$ von der Form $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^r})$ sind, und schließe von $\mu(K)$ auf $K \cap \mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$.

(b) Aus $G_{K_1}^{\mathrm{ab}} \cong G_{K_2}^{\mathrm{ab}}$ folgt im Allgemeinen aber nicht, dass $K_1 \cap \mathbb{Q}_p^{\mathrm{ab}} = K_2 \cap \mathbb{Q}_p^{\mathrm{ab}}$, selbst dann nicht, wenn K_1 und K_2 beide abelsch über $\mathbb{Q}_p$ sind: Betrachten Sie dazu $\mathbb{Q}_3(\zeta_{234})|\mathbb{Q}_3(\zeta_3)$. Zeigen Sie: Diese Erweiterung ist galoissch mit Galoisgruppe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und enthält neben den offensichtlichen Zwischenkörpern $\mathbb{Q}_3(\zeta_9)$ und $\mathbb{Q}_3(\zeta_{78})$ zwei weitere echte Zwischenkörper K_1 und K_2. Für diese gilt

$$[K_1 : \mathbb{Q}_3] = 6 = [K_2 : \mathbb{Q}_3] \qquad \text{und} \qquad \mu(K_1) = \mu_6 = \mu(K_2),$$

also auch $G_{K_1}^{\mathrm{ab}} \cong G_{K_2}^{\mathrm{ab}}$. [†]

[†] Betrachtet man statt der abelisierten die volle absolute Galoisgruppe, so ist die Lage anders: Die absoluten Galoisgruppen zweier endlichen Erweiterungen K_1, K_2 von $\mathbb{Q}_p$ sind (zumindest für $p \neq 2$) genau dann als abstrakte Gruppen isomorph, wenn

$$[K_1 : \mathbb{Q}_p] = [K_2 : \mathbb{Q}_p] \qquad \text{und} \qquad K_1 \cap \mathbb{Q}_p^{\mathrm{ab}} = K_2 \cap \mathbb{Q}_p^{\mathrm{ab}}.$$

Für Zahlkörper gibt es eine noch viel erstaunlichere Aussage, nämlich den **Satz von Neukirch-Uchida**: Die absoluten Galoisgruppen zweier Zahlkörper K und L sind genau dann isomorph, wenn $K \cong L$.