Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie II

Sommersemester 2011

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. A. Holschbach

Blatt 12
Abgabe bis Freitag, den 08.07.2011, um 14.00 Uhr

Aufgabe 1. Sei G eine endliche Gruppe, X ein G-freier G-Modul und

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

eine exakte Folge von G-Moduln. Zeigen Sie: Dann ist die induzierte Folge

$$0 \to \mathrm{Hom}_G(X, A) \to \mathrm{Hom}_G(X, B) \to \mathrm{Hom}_G(X, C) \to 0$$

exakt.

Aufgabe 2. Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung n und A eine abelsche Gruppe, auf der G trivial operiert. Zeigen Sie, dass $H^{-1}(G, A) = \ker(A \xrightarrow{\cdot n} A)$ und $H^0(G, A) = A/nA$. Bestimmen Sie für die kurze exakte Folge

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

von G-Moduln mit trivialer G-Operation den Teil der langen exakten Kohomologiesequenz von $H^{-1}(G, \mathbb{Z})$ bis $H^1(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Aufgabe 3. Sei $L|K$ eine endliche Galoiserweiterung von Körpern mit Galoisgruppe G. Dann macht die Operation der Galoisgruppe $(L, +)$ und $(L^\times, \cdot)$ zu G-Moduln; besonders letzterer wird in der Klassenkörpertheorie eine große Rolle spielen. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $H^0(G, L) = K/\operatorname{Sp}_{L|K} L = 0$ und $H^0(G, L^\times) = K^\times/N_{L|K}L^\times$.
Hinweis. Beachten Sie, dass für separable Erweiterungen die Spurform nicht ausgeartet ist.

(b) Sind K und L endliche Körper, so gilt $H^0(G, L^\times) = 1$.
Hinweis. Sei $q = \#K$, $n = [L : K]$. Benutzen Sie, dass G vom Frobenius $F : x \mapsto x^q$ erzeugt wird, um $N_{L|K}(x)$ als Polynom (oder besser: Monom) in x zu schreiben. Schätzen Sie damit die Ordnung von $\ker(N_{L|K} : L^\times \to K^\times)$ nach oben ab.

Aufgabe 4. Sei $L|K$ eine endliche Galoiserweiterung von Körpern mit Galoisgruppe G. Sei $x : G \to L^\times$ eine Derivation. Benutzen Sie die lineare Unabhängigkeit von Charakteren (siehe z.B. Korollar 4.5 aus der Zahlentheorie I), um zu zeigen, dass es ein $c \in L^\times$ gibt mit

$$b := \sum_{\tau \in G} x(\tau)\tau c \neq 0.$$

Zeigen Sie $x(\sigma)\sigma b = b$ für alle $\sigma \in G$. Folgern Sie, dass x eine innere Derivation ist, also

$$H^1(G, L^\times) = 1.^*$$

---

*Dieser Satz wird häufig als Hilbert 90 bezeichnet und ist eine Erweiterung des klassischen Hilbert 90, der in gruppenkohomologischer Fassung $H^{-1}(G, L^\times) = 1$ für zyklische Erweiterungen $L|K$ lautet. Den Zusammenhang zwischen diesen beiden Versionen von Hilbert 90 werden wir bald verstehen.

Aufgabe 5*. Sei G eine endliche Gruppe und

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} D \to 0$$

eine exakte Folge von G-Moduln. Definieren Sie für jedes $q \in \mathbb{Z}$ kanonische Homomorphismen

$$\delta_q^2 : H^{q-1}(G, D) \to H^{q+1}(G, A),$$

und zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) δ_q^2 ist ein Isomorphismus für jedes $q \in \mathbb{Z}$;

(ii) $\bar{\beta}_q : H^q(G, B) \to H^q(G, C)$ ist ein Isomorphismus für jedes $q \in \mathbb{Z}$.

Hinweis. Setzen Sie $E = \operatorname{coker} \alpha = \ker \gamma$ und zerlegen Sie obige exakte Folge in zwei kurze. Benutzen Sie die beiden zugehörigen Kohomologiesequenzen, um δ_q^2 zu konstruieren. Zeigen Sie dann: Aus jeder der beiden Bedingungen (i) und (ii) folgt, dass die beiden Kohomologiesequenzen in folgende kurze exakte Folgen zerfallen:

$$0 \to H^{q-1}(G, D) \to H^q(G, E) \to H^q(G, C) \to 0 \quad \forall\, q \in \mathbb{Z}$$

und

$$0 \to H^q(G, B) \to H^q(G, E) \to H^{q+1}(G, A) \to 0 \quad \forall\, q \in \mathbb{Z}.$$

Diese kurzen Folgen zusammen mit einer der beiden Bedingungen (i) oder (ii) implizieren auch die andere.