# Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie II

Sommersemester 2011

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. A. Holschbach

Blatt 10
Abgabe bis Montag, den 27.06.2011, um 14.00 Uhr

---

**Aufgabe 1.** Sei $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)$, und sei $G = \mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q}) = \langle \sigma, \tau \rangle$, wobei $\sigma, \tau \in G$ bestimmt sind durch

$$\sigma(\sqrt[3]{2}) = \zeta_3 \sqrt[3]{2},\ \sigma(\zeta_3) = \zeta_3 \qquad \text{und} \qquad \tau(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2},\ \tau(\zeta_3) = \zeta_3^{-1}.$$

Zeigen Sie: Die $p$-adischen Bewertungen $v_2$ und $v_3$ auf $\mathbb{Q}$ haben jeweils genau eine Fortsetzung $w_2$ bzw. $w_3$ auf $L$. Bestimmen Sie die zugehörigen Zerlegungs-, Trägheits- und Verzweigungsgruppen in $L|\mathbb{Q}$.

*Hinweis.* Bestimmen Sie das Zerlegungsverhalten der Primideale $(2), (3) \subset \mathbb{Z}$ in den Erweiterungen $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})|\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}(\zeta_3)|\mathbb{Q}$. Schließen Sie auf die Größen $e$, $f$, $g$ in der Erweiterung $L|\mathbb{Q}$ und daraus auf die gesuchten Gruppen.

**Aufgabe 2.** Sei $L|K$ eine Galoiserweiterung von globalen Körpern mit Galoisgruppe $G$, $w$ eine Bewertung auf $L$ und $v$ die Einschränkung von $w$ auf $K$.

(a) Zeigen Sie: Ist $G_w$ die Zerlegungsgruppe von $w$ in $L|K$, so ist $L^{G_w}$ die maximale Teilerweiterung von $L|K$, die in unter der Einbettung $L \hookrightarrow L_w$ in $K_v$ abgebildet wird, mit anderen Worten: $L^{G_w} = L \cap K_v$ als Unterkörper von $L_w$.

(b) Sei nun $K = \mathbb{Q}$, $L$ und $G$ wie in Aufgabe 1, und sei $v_5$ die 5-adische Bewertung auf $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie: Es gibt genau eine Fortsetzung $w_5$ von $v_5$ auf $L$ mit $w_5(\sqrt[3]{2} - 3) > 0$, und bestimmen Sie die zugehörige Zerlegungsgruppe sowie $L \cap \mathbb{Q}_5 \subset L_{w_5}$.

**Aufgabe 3.** Sei $L|K$ eine endliche Galoiserweiterung nicht-archimedischer lokaler Körper mit Galoisgruppe $G$. Für eine reelle Zahl $s \geq -1$ sei die ***s*-te Verzweigungsgruppe in der unteren Nummerierung** von $L|K$ durch

$$G_s = G_s(L|K) = \{\sigma \in G \mid v_L(\sigma a - a) \geq s + 1 \quad \forall\, a \in \mathcal{O}_L\}$$

definiert. Zeigen Sie:

(a) Ist $K' \subset L$ ein Zwischenkörper, so gilt für alle $s \geq -1$:

$$G_s(L|K') = G_s(L|K) \cap G(L|K').$$

(b) Ist $x \in \mathcal{O}_L$ mit $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[x]$, so gilt

$$G_s = \{\sigma \in G \mid v_L(\sigma x - x) \geq s + 1\}.$$

Folgern Sie: Für $s \gg 0$ gilt $G_s = \{1\}$.

*Hinweis.* Zeigen Sie, dass für jedes $\sigma \in G$, $g \in \mathcal{O}_K[X]$ das Element $\sigma(g(x)) - g(x) = g(\sigma x) - g(x) \in \mathcal{O}_L$ durch $\sigma x - x$ teilbar ist.

(c) Es gilt $G_{-1}(L|K) = G(L|K)$, $G_0(L|K) = T(L|K)$ und $G_1(L|K) = V(L|K)$.

*Hinweis.* Nur $G_1 = V$ erfordert Arbeit. Schränken Sie zunächst mit (a) auf den Fall ein, dass $L|K$ rein verzweigt ist. Sei dann $\pi \in \mathcal{O}_L$ eine Uniformisierende von $L$, so dass $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\pi]$. Zeigen Sie mit (b): Für $\sigma \in G(L|K)$ gilt $\sigma \in V \Leftrightarrow \frac{\sigma\pi}{\pi} \in U^{(1)} \Leftrightarrow \sigma \in G_1$.

**Aufgabe 4.** Sei $p$ eine Primzahl, $\zeta = \zeta_{p^n}$ eine primitive $p^n$-te Einheitswurzel mit $n \in \mathbb{N}$ und $L = \mathbb{Q}_p(\zeta)$. Zeigen Sie:

(a) Für $m = m'p^r \in \mathbb{N}$, $(m', p) = 1$, gilt

$$v_L(\zeta^m - 1) = \begin{cases} p^r, & \text{falls } r < n, \\ \infty, & \text{falls } r \geq n. \end{cases}$$

*Hinweis.* Zeigen Sie im Fall $r < n$, dass $\zeta^m - 1$ eine Uniformisierende von $K' = \mathbb{Q}_p(\zeta^m) = \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^{n-r}})$ ist, und verwenden Sie, dass $L|K'$ rein verzweigt vom Grade $p^r$ ist.

(b) Die höheren Verzweigungsgruppen von $L|\mathbb{Q}_p$ sind gegeben durch

$$G_s = \begin{cases} G(L|\mathbb{Q}_p), & \text{falls } s \leq 0, \\ G(L|\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^k})), & \text{falls } p^{k-1} - 1 < s \leq p^k - 1 \text{ mit } 1 \leq k \leq n, \\ 1, & \text{falls } s > p^n - 1. \end{cases}$$

*Hinweis.* Verwenden Sie $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}_p[\zeta]$ und zeigen Sie:

$$\begin{aligned} \sigma \in G(L|\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^k})) &\iff \sigma(\zeta) = \zeta^a \text{ mit } a \equiv 1 \bmod p^k \\ &\iff v_L(\sigma(\zeta) - \zeta) \geq p^k. \end{aligned}$$

**Aufgabe 5*.** Sei $L|K$ eine endliche Galoiserweiterung $\mathfrak{p}$-adischer Körper mit Galoisgruppe $G$. Zeigen Sie: Für die Differente von $L|K$ (siehe Blatt 9) gilt $\mathfrak{D}_{L|K} = \mathfrak{p}_L^m$ mit

$$m = \sum_{n=0}^{\infty} (g_n - 1),$$

wobei $g_n = \#G_n(L|K)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ (beachte $g_n = 1$ für $n \gg 0$).
*Hinweis.* Sei $x \in \mathcal{O}_L$ mit $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[x]$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist die Anzahl der $\sigma \in G$ mit $v_L(\sigma x - x) = n$ gleich $g_{n-1} - g_n = (g_{n-1} - 1) - (g_n - 1)$.