Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie II

Sommersemester 2011

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. A. Holschbach

Blatt 9
Abgabe bis Freitag, den 17.06.2011, um 14.00 Uhr

Aufgabe 1. Es sei $K = \mathbb{Q}_2(\sqrt{3})$, $L = K(\sqrt{-1})$. Zeigen Sie:

(a) Die Erweiterung $K|\mathbb{Q}_2$ ist rein verzweigt vom Grad 2, und die Erweiterung $L|K$ ist unverzweigt vom Grad 2.

(b) Die maximal unverzweigte und gleichzeitig auch maximal zahm verzweigte Teilerweiterung von $L|\mathbb{Q}_2$ ist durch $\mathbb{Q}_2(\sqrt{-3})|\mathbb{Q}_2$ gegeben.

Aufgabe 2. Sei p eine Primzahl, $n = n'p^m$ eine natürliche Zahl mit $m, n' \in \mathbb{N}$, $(n', p) = 1$. Sei $\zeta_n \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ eine primitive n-te Einheitswurzel, und sei $K = \mathbb{Q}_p(\zeta_n)$. Zeigen Sie: Für die maximale unverzweigte Teilerweiterung K' und die maximale zahm verzweigte Teilerweiterung K'' von $K|\mathbb{Q}_p$ gilt

$$\mathbb{Q}_p \quad \subset \quad K' = \mathbb{Q}_p(\zeta_{n'}) \quad \subset \quad K'' = \mathbb{Q}_p(\zeta_{n'p}) \quad \subset \quad K.$$

Hinweis. Folgern Sie aus Ihrem Vorwissen aus Zahlentheorie I und II, dass $\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^m})|\mathbb{Q}_p$ rein verzweigt vom Grad $\varphi(p^m) = p^{m-1}(p-1)$ und $\mathbb{Q}_p(\zeta_{n'})|\mathbb{Q}_p$ unverzweigt ist. Schließen Sie, dass auch $K|\mathbb{Q}_p(\zeta_{n'})$ rein verzweigt vom Grad $\varphi(p^m)$ sein muss.

Aufgabe 3. Sei $L|K$ eine endliche Erweiterung $\mathfrak{p}$-adischer Körper, $x \in \mathcal{O}_L$ und $f \in \mathcal{O}_K[X]$ das Minimalpolynom von x über K. Wir definieren die **Differente** von x durch

$$\delta_{L|K}(x) = \begin{cases} f'(x), & \text{falls } L = K(x), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie: Ist $L = K(x)$ und $y \in \mathcal{O}_K[x]$, so folgt

$$\delta_{L|K}(x) \mid \delta_{L|K}(y) \quad \text{in } \mathcal{O}_L.$$

Insbesondere gilt: Ist $z \in \mathcal{O}_L$ mit $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[z]$, so ist das Ideal $\mathfrak{D}_{L|K} = (\delta_{L|K}(z)) \subset \mathcal{O}_L$ unabhängig von der Wahl von z. Dieses Ideal nennt man die **Differente** von $L|K$.

Hinweis. Sei $g \in \mathcal{O}_K[X]$ mit $y = g(x)$. Zeigen Sie zunächst: Sind $x_1 = x, x_2, \ldots, x_n$ die verschiedenen Konjugierten von x über K, so durchläuft $g(x_1), \ldots, g(x_n)$ die Konjugierten von y über K. Zeigen Sie dann

$$\delta_{L|K}(x) = (x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

und die analoge Formel für $\delta_{L|K}(y)$, und folgern Sie die Behauptung.

Aufgabe 4. Sei K ein $\mathfrak{p}$-adischer Körper, und sei $L|K$ eine rein verzweigte Erweiterung vom Grad e. Zeigen Sie: Für die Differente gilt $\mathfrak{D}_{L|K} = \mathfrak{p}_L^s$ mit

$$\begin{aligned} s &= e-1, && \text{falls } L|K \text{ zahm verzweigt,} \\ e \leq s &\leq e-1+v_L(e), && \text{falls } L|K \text{ wild verzweigt.} \end{aligned}$$

Hinweis. Sei $\pi \in \mathcal{O}_L$ eine Uniformisierende und $f = X^e + a_{e-1}X^{e-1} + \ldots + a_0 \in \mathcal{O}_K[X]$ das zugehörige Minimalpolynom. Zeigen Sie, dass

$$s = v_L(f'(\pi)) = \min_{1 \leq i \leq e} (i - 1 + v_L(i\, a_i)),$$

wobei hier $a_e = 1$ gesetzt sei, und folgern Sie daraus in beiden Fällen die Behauptung.

Aufgabe 5.* Es sei K ein lokaler Körper mit Restklassenkörper k, $p = \mathrm{char}(k)$, $q = \#k$. Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $(n,p) = 1$. Zeigen Sie, dass jede rein verzweigte Erweiterung $L|K$ mit $[L:K] = n$ von der Form $L = K(\sqrt[n]{\pi})$ mit einer Uniformisierenden π von K ist. Folgern Sie: Ist $\overline{K}$ ein separabler Abschluss von K, dann gibt es innerhalb von $\overline{K}|K$ bis auf Konjugation genau $(n, q-1)$ paarweise verschiedene rein verzweigte Erweiterungen von K vom Grad n.