Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie II

Sommersemester 2011

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. A. Holschbach

Blatt 6
Abgabe bis Freitag, den 27.05.2011, um 14.00 Uhr

Aufgabe 1. Sei K ein Körper mit einer nicht-archimedischen nicht-diskreten Bewertung v, und seien $\mathcal{O}_v$ und $\mathfrak{p}_v$ der Bewertungsring zu v bzw. dessen maximales Ideal. Zeigen Sie: Es gilt $\mathfrak{p}_v = \mathfrak{p}_v^2$. Insbesondere stimmt die $\mathfrak{p}_v$-adische Vervollständigung $\hat{\mathcal{O}}_v$ von $\mathcal{O}_v$ nicht mit dem Bewertungsring $\mathcal{O}_{\hat{K}_v}$ der Vervollständigung von K bzgl. v überein.

Aufgabe 2. Sei (K, v) ein nicht-archimedisch bewerteter Körper und $(\hat{K}_v, v)$ seine Vervollständigung. Zeigen Sie:

(a) Die Wertegruppen $v(K)$ und $v(\hat{K}_v)$ stimmen überein.

(b) Die Einbettung $\mathcal{O}_v \hookrightarrow \mathcal{O}_{\hat{K}_v}$ der zugehörigen Bewertungsringe induziert einen Isomorphismus der Restklassenkörper

$$\mathcal{O}_v/\mathfrak{p}_v \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\hat{K}_v}/\mathfrak{p}_{\hat{K}_v}.$$

Aufgabe 3. Sei (K, v) ein nicht-archimedisch bewerteter Körper mit Bewertungsring $\mathcal{O}_v$, $f \in \mathcal{O}_v[X]$ ein Polynom und $a_0 \in \mathcal{O}_v$ mit $|f(a_0)|_v < |f'(a_0)|_v^2$. Betrachten Sie die Folge (a_n) in K mit

$$a_n = a_{n-1} - \frac{f(a_{n-1})}{f'(a_{n-1})} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie durch Betrachten der Taylorentwicklungen von f und f': Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|f'(a_n)|_v = |f'(a_{n-1})|_v, \qquad \left|\frac{f(a_n)}{f'(a_n)^2}\right|_v \leq \left|\frac{f(a_{n-1})}{f'(a_{n-1})^2}\right|_v^2.$$

Folgern Sie: Ist K vollständig, so konvergiert die Folge (a_n) in K, und für ihren Grenzwert a gilt $f(a) = 0$, $|f'(a)|_v = |f'(a_0)|_v$ und $|a - a_0|_v < |f'(a_0)|_v$.

Dies verallgemeinert das in der Vorlesung gezeigte Hensel'sche Lemma auf beliebige nicht-archimedisch (nicht notwendig diskret) bewertete vollständige Körper.

Aufgabe 4. Es sei $(K, |\ |)$ ein vollständig archimedisch bewerteter Körper, und sei $c \in K$ mit $|c| < 1$. Betrachten Sie die Folge (x_n) in K mit

$$x_0 = 1, \qquad x_n = \frac{c}{x_{n-1}} - 2 \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie: (x_n) ist eine Cauchyfolge, und $1 + c$ ist ein Quadrat in K. Folgern Sie: Ist -1 kein Quadrat in K, so gilt $|1 + x^2| \geq 1$ für alle $x \in K$.

Hinweis. Zeigen Sie zunächst, dass $|x_n| \geq 1 \,\forall\, n$, und dann

$$|x_{n+1} - x_n| \leq |c||x_n - x_{n-1}| \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 5*. Sei $(K, |\ |)$ ein vollständig archimedisch bewerteter Körper. Aus der Vorlesung wissen wir, dass wir $\mathbb{R}$ in K einbetten können; sei K_0 der algebraische Abschluss von $\mathbb{R}$ in K (d.h. $K_0 \cong \mathbb{C}$ oder $K_0 \cong \mathbb{R}$, je nachdem, ob -1 ein Quadrat in K ist oder nicht). Wir wollen den *Satz von Gelfand-Tornheim-Ostrowski* zeigen: Es gilt $K_0 = K$.

Angenommen, es gäbe ein $a \in K \setminus K_0$. Zeigen Sie, dass wir a so wählen können, dass

$$d(a, K_0) = |a| > 1.$$

Zeigen Sie nun

$$|a|^{2^n} + 1 \geq |a^{2^n} - 1| \geq |a - 1||a|^{2^n - 1}.$$

(*Hinweis.* Hier muss eine Fallunterscheidung unternommen werden: Ist $K_0 \cong \mathbb{C}$, so enthält K_0 alle 2^n-ten Einheitswurzeln, und die Aussage folgt unmittelbar aus der Wahl von a. Ist $K_0 \cong \mathbb{R}$, so verwende man Aufgabe 4, um zu zeigen, dass $|a^{2^k} + 1| \geq |a|^{2^k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.)

Folgern Sie $|a - 1| = |a|$ und per Induktion $|a - n| = |a|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wieso ergibt dies einen Widerspruch für $n \gg 0$?