Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie II

Sommersemester 2011

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. A. Holschbach

Blatt 4
Abgabe bis Freitag, den 13.05.2011, um 14.00 Uhr

Aufgabe 1. Sei A ein nullteilerfreier Ring, $\mathfrak{m} \subset A$ ein Maximalideal. Dann muss die $\mathfrak{m}$-adische Vervollständigung $\hat{A}$ von A nicht nullteilerfrei sein. Zeigen Sie dies am Beispiel $A = k[X, Y]/(Y^2 - X^2(X+1))$, $\mathfrak{m} =$ das von den Restklassen von X und Y erzeugte Ideal. Hierbei sei k ein Körper mit $\operatorname{char}(k) \neq 2$.
Hinweis. Zeigen Sie, dass $\hat{A} \cong k[[X, Y]]/(Y^2 - X^2(X + 1))$ und dass $1 + X$ in $k[[X]] \subset k[[X, Y]]$ ein Quadratwurzel besitzt.*

Aufgabe 2. Es sei p eine Primzahl. Zeigen Sie:

(a) Eine p-adische Zahl $a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i \in \mathbb{Z}_p$ (mit $a_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$) liegt genau dann im Bild der kanonischen Abbildung

$$\mathbb{Z}_{(p)} \to \widehat{\mathbb{Z}_{(p)}} = \mathbb{Z}_p,$$

wenn die Folge $a_0, a_1, \ldots$ der Ziffern in der p-adischen Entwicklung von a nach einer Weile periodisch wird. Bestimmen Sie die 7-adische Entwicklung von $\frac{5}{3}$ und $-\frac{5}{3}$.
Hinweis. Für $\frac{b}{c} \in \mathbb{Z}_{(p)}$ sei f die Ordnung von p in $(\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^\times$. Schreiben Sie $\frac{b}{c}$ in der Form $\frac{b}{c} = \frac{d}{1-p^f}$.

(b) $\mathbb{Z}_p$ und damit auch $\mathbb{Q}_p$ sind überabzählbar. Insbesondere ist $\mathbb{Q}_p$ keine algebraische Erweiterung von $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 3. Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie:

(a) 2 besitzt genau dann eine Quadratwurzel in $\mathbb{Z}_p$, wenn $p \equiv \pm 1 \bmod 8$. In $\mathbb{Z}_p$ gibt es genau dann eine Kubikwurzel von 3, wenn $p \equiv -1 \bmod 3$ oder wenn $p \equiv 1 \bmod 3$ und $3^{(p-1)/3} \equiv 1 \bmod p$.

(b) Ein Element $a \in \mathbb{Q}_p^\times$ liegt genau dann in $\mathbb{Z}_p^\times$, wenn es für unendlich viele Werte von $n \in \mathbb{N}$ eine n-te Wurzel in $\mathbb{Q}_p$ besitzt.

---

*In der algebraischen Geometrie versteht man dieses Beispiel besser. Dort entspricht A der Kurve $Y^2 - X^2(X+1) = 0$ im zweidimensionalen Raum, und die Vervollständigung $\hat{A}$ entspricht einer analytischen Umgebung des Punktes $(0, 0)$ auf dieser Kurve. Dass $\hat{A}$ in ein direktes Produkt $k[[X]] \times k[[X]]$ zerfällt, spiegelt die Tatsache wieder, dass sich die Kurve in diesem Punkt selbst schneidet.

Aufgabe 4. Es sei A ein kommutativer nullteilerfreier Ring und K der Quotientenkörper von A. Der Ring A heißt *Bewertungsring von K*, falls für jedes $x \in K \setminus \{0\}$ gilt: $x \in A$ oder $x^{-1} \in A$. Im Folgenden sei A ein Bewertungsring von K. Zeigen Sie:

(a) Die in der Vorlesung vorgestellten Bewertungsringe zu nicht-archimedischen Bewertungen sind Bewertungsringe im obigen Sinne.

(b) A ist ein lokaler Ring.

(c) A ist ganzabgeschlossen (in K).

(d) Ist A noethersch, so ist A ein Hauptidealring.

Aufgabe 5*. Seien p, ℓ zwei verschiedene Primzahlen. Zeigen Sie:

(a) Es gibt keinen Körperhomomorphismus $\mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_\ell$. Ebensowenig gibt es Körperhomomorphismen $\mathbb{Q}_p \to \mathbb{R}$ oder $\mathbb{R} \to \mathbb{Q}_p$.

(b) $\mathbb{Q}_p$ besitzt nur den trivialen Körperautomorphismus. Gleiches gilt für $\mathbb{R}$.

Beachten Sie: Es wird nicht gefordert, dass die Homomorphismen stetig sind!