Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie II

Sommersemester 2011

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. A. Holschbach

Blatt 3
Abgabe bis Freitag, den 06.05.2011, um 14.00 Uhr

Aufgabe 1. Es sei G eine proendliche Gruppe und H ein abgeschlossener Normalteiler von G. Zeigen Sie, dass G/H mit der Quotiententopologie eine proendliche Gruppe ist.

Aufgabe 2. Eine proendliche Gruppe G heißt **prozyklisch**, wenn G topologisch durch ein einziges Element $\sigma \in G$ erzeugt wird, d. h. G ist der Abschluss $\overline{\langle\sigma\rangle}$ der Untergruppe $\langle\sigma\rangle = \{\sigma^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie:

(a) Ist G eine prozyklische Gruppe, dann sind die offenen Untergruppen von G genau von der Form $G^n = \{g^n \mid g \in G\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis. Benutzen Sie, dass eine Untergruppe einer kompakten topologischen Gruppe genau dann offen ist, wenn sie abgeschlossen und von endlichem Index ist.

(b) Jede prozyklische Gruppe ist ein Quotient von $\widehat{\mathbb{Z}}$.

Aufgabe 3. Es sei k ein Körper, $L|k$ eine Galoiserweiterung und $K|k$ eine beliebige Erweiterung, beide enthalten in einer Erweiterung $\Omega|k$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathrm{Gal}(LK|K) \to \mathrm{Gal}(L|L \cap K), \quad \sigma \mapsto \sigma|_L,$$

ein topologischer Isomorphismus proendlicher Gruppen ist.

Aufgabe 4. Es sei μ die Gruppe aller Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$.

(a) Für $a = (a_n) \in \widehat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und $\zeta \in \mu$ setze man $\zeta^a := \zeta^{a_n}$, wenn $\zeta^n = 1$. Zeigen Sie: Diese Zuordnung ist wohldefiniert, und für beliebige $a, b \in \widehat{\mathbb{Z}}$, $\zeta, \xi \in \mu$ gilt

$$(\zeta^a)^b = \zeta^{ab}, \quad \zeta^a\zeta^b = \zeta^{a+b} \quad \text{und} \quad \zeta^a\xi^a = (\zeta\xi)^a.$$

(b) Zeigen Sie: Ist K ein Zahlkörper, dann gibt es einen injektiven Homomorphismus proendlicher Gruppen

$$\chi_{zykl} : \mathrm{Gal}(K(\mu)|K) \to \widehat{\mathbb{Z}}^\times,$$

so dass für jede Einheitswurzel $\zeta \in \mu$ und jedes $\sigma \in \mathrm{Gal}(K(\mu)|K)$ gilt:

$$\sigma(\zeta) = \zeta^{\chi_{zykl}(\sigma)}.$$

Für $K = \mathbb{Q}$ ist χ_{zykl} ein Isomorphismus proendlicher Gruppen.

χ_{zykl} heißt der **zyklotomische Charakter**.

Aufgabe 5*. Für eine abelsche topologische Gruppe A setzen wir

$$A^\vee = \mathrm{Hom}_{\text{stetig}}(A, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$$

und nennen es das **Pontryagin-Dual** zu A. Hierbei sei $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ über die kanonische Projektion $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ mit der Quotiententopologie von $\mathbb{R}$ versehen. Zeigen Sie:

(a) Ist $(A_i)_{i\in I}$ ein direktes System von diskreten endlichen abelschen Gruppen, und versieht man $A = \varinjlim A_i$ mit der diskreten Topologie, so gilt

$$A^\vee \cong \varprojlim A_i^\vee.$$

Folgern Sie: Das Pontryagin-Dual einer diskreten abelschen Torsionsgruppe kann als abelsche proendliche Gruppe dargestellt werden.

(b) Ist $(A_i)_{i\in I}$ ein projektives System von diskreten endlichen abelschen Gruppen mit surjektiven Übergangsabbildungen, und betrachtet man $A = \varprojlim A_i$ als proendliche Gruppe, so gilt

$$A^\vee \cong \varinjlim A_i^\vee.$$

Folgern Sie: Das Pontryagin-Dual einer abelschen proendlichen Gruppe ist eine abelsche Torsionsgruppe, welche wir im Folgenden mit der diskreten Topologie versehen.

Hinweis. Zu beliebigem $\phi \in A^\vee$ betrachte man das Urbild $\phi^{-1}(V)$ der offenen Menge $V = \pi((-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})) \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Dann enthält $\phi^{-1}(V)$ eine offene Untergruppe von A der Form $U_i = \ker(A \to A_i)$ (warum?). Zeigen Sie, dass $U_i \subset \ker(\phi)$.

(c) Die proendliche Gruppe $\widehat{\mathbb{Z}}$ und die diskrete Torsionsgruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sind Pontryagin-dual zueinander.

(d) Ist A eine diskrete abelsche Torsionsgruppe oder eine abelsche proendliche Gruppe, so ist

$$A \to (A^\vee)^\vee, \quad a \mapsto \tau_a : A^\vee \to \mathbb{R}/\mathbb{Z},\ \phi \mapsto \phi(a),$$

ein (kanonischer) Isomorphismus topologischer Gruppen.

Hinweis. Man zeige dies zunächst in dem Fall, dass A eine endliche abelsche Gruppe mit diskreter Topologie ist, und verwende dann (a) bzw. (b).