Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie II

Sommersemester 2011

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. A. Holschbach

Blatt 1
Abgabe bis Freitag, den 22.04.2011, um 14.00 Uhr

Aufgabe 1. Es sei R ein kommutativer Ring mit 1 und $(M_i)_{i\in I}$ ein direktes System von R-Moduln. Ist N ein R-Modul, so wird $(\operatorname{Hom}_R(M_i, N))_{i\in I}$ in natürlicher Weise zu einem projektiven System von R-Moduln. Zeigen Sie, dass es einen kanonischen Isomorphismus

$$\varprojlim_{i\in I} \operatorname{Hom}_R(M_i, N) \cong \operatorname{Hom}_R(\varinjlim_{i\in I} M_i, N)$$

von R-Moduln gibt.

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

(a) Sei $(R_i)_{i\in I}$ ein projektives System von kommutativen Ringen mit 1 und $R = \varprojlim_{i\in I} R_i$. Dann bilden auch die Einheitengruppen $R_i^\times$ ein projektives System, und es gilt kanonisch $R^\times \cong \varprojlim R_i^\times$.

(b) Sei p eine ungerade Primzahl. Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt $(1+p)^{p^n} \equiv 1 + p^{n+1} \mod p^{n+2}\mathbb{Z}$. Folgern Sie: Die Abbildung

$$f_n : \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z})^\times, \quad a + p^n\mathbb{Z} \mapsto (1+p)^a + p^{n+1}\mathbb{Z},$$

ist wohldefiniert und ein injektiver Homomorphismus abelscher Gruppen. Durch

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "\mathrm{pr}"'] & (\mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z})^\times \arrow[r, "\mathrm{pr}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}"'] & (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & 1 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z} \arrow[r, "f_{n-1}"] & (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times \arrow[r, "\mathrm{pr}"] & (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

ergibt sich eine exakte Folge von projektiven Systemen[†]. Folgern Sie weiter: Wir erhalten eine exakte Folge

$$0 \to \mathbb{Z}_p \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_p^\times \xrightarrow{\mathrm{pr}} (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \to 1.$$

[†]In dem Diagramm bezeichnen sowohl 0 als auch 1 die triviale Gruppe. Da links additive und rechts multiplikative Gruppen stehen, erscheint diese Schreibweise opportun.

Aufgabe 3. Sei $I = \mathbb{N}$ und p eine Primzahl. Wir betrachten die exakte Folge

$$0 \longrightarrow (M'_n) \xrightarrow{(f_n)} (M_n) \xrightarrow{(g_n)} (M''_n) \longrightarrow 0,$$

wobei $M'_n = \mathbb{Z} = M_n$, $M''_n = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ und f_n, g_n und die Übergangsabbildungen durch folgendes kommutatives Diagramm gegeben sind:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot p^{n+1}"] \arrow[d, "\cdot p"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\mathrm{pr}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{pr}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot p^{n}"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\mathrm{pr}"] & \mathbb{Z}/p^{n}\mathbb{Z} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Bestimmen Sie $\varprojlim M'_n$, $\varprojlim M_n$ und $\varprojlim M''_n$ und zeigen Sie, dass in der induzierten Folge

$$0 \longrightarrow \varprojlim M'_n \xrightarrow{f} \varprojlim M_n \xrightarrow{g} \varprojlim M''_n$$

der Homomorphismus g nicht surjektiv ist.

Aufgabe 4. Sei X ein quasikompakter topologischer Raum. Zeigen Sie:

(a) Ist $A \subset X$ abgeschlossen, so ist auch A quasikompakt (in der Unterraumtopologie).

(b) Ist $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung in einen topologischen Raum Y, so ist auch $f(X)$ quasikompakt (als Unterraum von Y).

Aufgabe 5*. Sei X ein kompakter topologischer Raum. Zeigen Sie:

(a) Sind $A_1, A_2 \subset X$ zwei disjunkte abgeschlossene Mengen, so gibt es disjunkte offene Teilmengen $V_1, V_2 \subset X$ mit $A_1 \subset V_1$, $A_2 \subset V_2$.

Hinweis. Beweisen Sie die Aussage zunächst im Fall, dass $A_2 = \{x\}$ für ein $x \in X$, und folgern Sie dann damit den allgemeinen Fall.

(b) Für $x \in X$ bezeichne D_x den Durchschnitt aller Teilmengen U von X, für die gilt:

- U ist offen und abgeschlossen,
- $x \in U$.

Dann stimmt D_x mit der Zusammenhangskomponente C_x überein.

Hinweis. Der Beweis von $C_x \subset D_x$ und D_x abgeschlossen sollte nicht besonders schwerfallen. Seien $A_1, A_2 \subset X$ zwei abgeschlossene disjunkte Teilmengen mit $x \in A_1$, $A_1 \cup A_2 = D_x$. Wählen Sie V_1, V_2 wie in (a) und beweisen Sie, dass es eine offene und abgeschlossene Menge U gibt, so dass $x \in U \subset V_1 \cup V_2$. Zeigen Sie, dass auch $V_1 \cap U$ offen und abgeschlossen ist, und folgern Sie $A_2 = \varnothing$. Was impliziert dies für D_x?