Seminar über quadratische Formen
(mit Dr. A. Holschbach und G. Tamme)

Zeit und Ort: 2 st., Mo 16–18, M 103 (G. Tamme)
2 st., Di 16–18, M 103 (A. Holschbach)

Repetitorium: Mo, 13–16, M 235 oder nach Absprache (G. Tamme)
Mi 14–17, M 219 oder nach Absprache (A. Holschbach)

Vorkenntnisse: Lineare Algebra I, II, Grundkenntnisse in Algebra I.

Inhalt: *Quadratische Formen* sind homogene Polynome vom Grad 2 in einer oder mehreren Variablen, z.B. $q(X,Y) = X^2 - 3XY - Y^2$. Aufgrund ihrer simplen Form tauchen sie in fast jedem Teilgebiet der Mathematik auf. Wir wollen uns ihnen von der algebraischen/zahlentheoretischen Seite nähern, d.h. ihr Verhalten über den ganzen und den rationalen Zahlen studieren.

Schon aus einfachen Fragestellungen ergeben sich dabei interessante Theorien. Ein Ausgangspunkt ist z.B. folgende Frage: Gegeben sei eine quadratische Form $q(X_1,\dots,X_n) \in \mathbb{Q}[X_1,\dots,X_n]$ und eine Zahl $a \in \mathbb{Q}$. Ist dann *a durch q darstellbar*, d.h. gibt es $b = (b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{Q}^n$, $b \neq 0$, mit $q(b_1,\dots,b_n) = a$?

Die Suche nach Kriterien für die Darstellbarkeit von a durch q führt zum sogenannten *Lokal-Global-Prinzip von Hasse-Minkowski*, das ein zentraler Punkt dieses Seminars sein wird. Als Anwendung werden wir unter anderem den Satz von Lagrange beweisen, der besagt, dass sich jede natürliche Zahl als Summe von (bis zu) vier Quadraten schreiben lässt.

Programm

Das Seminar baut zu großen Teilen auf dem Buch *A Course in Arithmetic* von Serre auf ([S], siehe Literaturliste am Ende). Soweit nicht anders angegeben, beziehen sich alle Verweise in der folgenden Programmbeschreibung auf dieses Buch. Die für manche Vorträge zusätzlich angegebenen Abschnitte im Buch [Schm] sollen lediglich dem besseren Verständnis dienen; maßgeblich für den Inhalt der Vorträge ist das Buch von Serre (außer in den letzten beiden Vorträgen, dort sind die Quellen gesondert ausgewiesen).

Das Seminar umfasst 13 Sitzungen. Die Vorträge bauen aufeinander auf; jeder Vortrag umfasst 90 Minuten. Diese Zeitgrenze sollte nicht überschritten werden. Wenn die Vortragszeit nicht auszureichen scheint, muss eine sinnvolle Auswahl des Stoffes getroffen werden.

Bei Fragen wendet Euch an:

- Georg Tamme, M 235, georg.tamme@mathematik.uni-regensburg.de bzw.
- Armin Holschbach, M 219, armin.holschbach@mathematik.uni-regensburg.de

1 Der Satz von Chevalley-Warning und das quadratische Reziprozitätsgesetz ([S, I.2 – I.3], vgl. auch [Schm, 2.1, 2.2 & 3.3])

Nach kurzer Wiederholung der beiden Sätze aus §I.1 (ohne Beweis) zeige man den Satz von Chevalley-Warning (§I.2). Danach definiere man das Legendresymbol und zeige all seine Eigenschaften inklusive des quadratischen Reziprozitätsgesetzes (§I.3). Der alternative Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes im Anhang sollte ausgelassen werden.

Vortragende:	Thomas Synkule	Mo, 19.4.2010
	Ramona Schiller	Di, 20.4.2010

2 Die p-adischen Zahlen ([S, II.1], vgl. auch [Schm, 9.1–9.3])

Der Begriff des projekiven Limes sollte sauber eingeführt werden (vgl. [N, Seite 107]) und damit die ganzen p-adischen Zahlen definiert werden. Man definiere nun den Körper der p-adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$ und erläutere die Bemerkungen nach Proposition II.1.4. Insbesondere sollte die Analogie zur Konstruktion der reellen Zahlen herausgestellt werden (siehe [N, II.2]).

Vortragende:	Matthias Bauer	Mo, 26.4.2010
	Jeannette Lorenz	Di, 27.4.2010

3 p-adische Gleichungen ([S, II.2], vgl. auch [Schm, 9.5])

Man behandle Kriterien für die Lösbarkeit algebraischer Gleichungen über den p-adischen Zahlen, insbesondere Hensels Lemma (Corollary II.2.1). Die Analogie (und die Unterschiede) zum gewöhnlichen Newtonverfahren sollten herausgestellt werden.

Vortragende:	Stephan Müller	Mo, 3.5.2010
	Sabine Schick	Di, 4.5.2010

4 Die multiplikative Gruppe von $\mathbb{Q}_p$ ([S, II.3])

Man wiederhole ganz kurz die Definition einer kurzen exakten Folge abelscher Gruppen und zeige dann die Struktursätze für $\mathbb{Q}_p^\times$, die Einseinheitengruppe U_1 und die Gruppe der Quadrate $(\mathbb{Q}_p^\times)^2$.

Vortragende:	Andreas Gabler	Mo, 10.5.2010
	Sebastian Braun	Di, 11.5.2010

5 Lokale Eigenschaften des Hilbert-Symbols ([S, III.1], vgl. auch [Schm, 9.6])

Man definiere das Hilbert-Symbol und zeige seine lokalen Eigenschaften. Die beiden Bemerkungen im Text dürfen weggelassen werden.

Vortragende:	Thomas Spitzer	Mo, 17.5.2010
	Christoph Hegenbarth	Di, 18.5.2010

6 Globale Eigenschaften des Hilbert-Symbols ([S, III.2], vgl. auch [Schm, 9.7])

Man beweise die Produktformel für das Hilbert-Symbol und untersuche die Bedingungen für die Existenz einer rationalen Zahl mit vorgegebenen Hilbert-Symbolen. Der Dirichletsche Primzahlsatz wird dabei ohne Beweis erwähnt.

Vortragende:	Michael Scherer	Mo, 31.5.2010
	Tobias Frank	Di, 1.6.2010

7 Quadratische Formen I ([S, IV.1.1 – IV.1.4])

Dieser Vortrag führt den Begriff der quadratischen Form ein; eine kurze Darstellung des Zusammenhangs mit symmetrischen Bilinearformen ist hilfreich. Man behandle die Punkte Orthogonalität, isotrope Vektoren und Orthonormalbasis.

Vortragende:	Kristina Weber	Mo, 7.6.2010
	Johanna Schödel	Di, 8.6.2010

8 Quadratische Formen II ([S, IV.1.5 – IV.1.7], vgl. auch [Schm, 10.2])

Ein wichtiges Theorem für die folgenden Untersuchungen ist der Satz von Witt, dessen Beweis den ersten Teil des Vortrags ausmacht. Man übersetze dieses Resultat in die Sprache der quadratischen Formen und untersuche quadratische Formen über endlichen Körpern.

Vortragende:	Maria Molz	Mo, 14.6.2010
	Ursula Neumann	Di, 15.6.2010

9 Quadratische Formen über $\mathbb{Q}_p$ und $\mathbb{R}$ ([S, IV.2], vgl. auch [Schm, 10.3 & 10.4])

Man führe die beiden lokalen Invarianten ein und behandle die Frage der Darstellbarkeit einer p-adischen Zahl durch eine quadratische Form. Die Bemerkungen am Ende von §IV.2.2 lasse man aus. Zu guter Letzt klassifiziere man die quadratischen Formen über $\mathbb{Q}_p$ und $\mathbb{R}$.

Vortragende:	Carolin Schwarz	Mo, 21.6.2010
	Eva Kastner	Di, 22.6.2010

10 Quadratische Formen über $\mathbb{Q}$ und der Satz von Hasse-Minkowski ([S, IV.3.1 – IV.3.2], vgl. auch [Schm, 10.5])

Nun sind wir bereit, den Fall der quadratischen Formen über $\mathbb{Q}$ anzugehen. Man definiere die globalen Invarianten und beweise den Satz von Hasse-Minkowski.

Vortragende:	Ralph Huber	Mo, 28.6.2010
	Regina Schmiddunser	Di, 29.6.2010

11 Klassifikation der quadratischen Formen über $\mathbb{Q}$ und Summen von drei Quadraten ([S, IV.3.3 – IV.Appendix], vgl. auch [Schm, 10.6])

Die Ergebnisse des letzten Vortrags können nun benutzt werden, um die quadratischen Formen über $\mathbb{Q}$ zu klassifizieren. Als Anwendung untersuche man die Darstellbarkeit natürlicher Zahlen durch drei Quadrate und beweise den Vier-Quadrate-Satz von Lagrange sowie den Dreieckszahlen-Satz von Gauß.

Vortragende:	Monika Schels	Mo, 5.7.2010
	Linda Bachhuber	Di, 6.7.2010

12 Der Minkowskische Gitterpunktsatz

Man definiere den Begriff des Gitters und einer Grundmasche eines Gitters ([Sche, S. 258], [N, S. 25]). Dann zeige man den Minkowskischen Gitterpunktsatz ([SO, S. 197], vgl. auch [N, S. 28]). Als Anwendung können wir zunächst einen weiteren Beweis des Vier-Quadrate-Satzes geben ([Sche, S. 260, Anwendung 2]). Zu guter Letzt gebe man eine Abschätzung für den minimalen von Null verschiedenen Wert einer positiv definiten ganzzahligen quadratischen Form ([SO, Satz 9.5]).

Vortragende:	Christoph Kemptner	Mo, 12.7.2010
	Hannah Grieger	Di, 13.7.2010

13 Endlichkeit der Klassenzahl und Anwendungen

Man definiere Äquivalenz von ganzzahligen quadratischen Formen und zeige, dass es nur endlich viele Äquivalenzklassen von positiv definiten quadratischen Formen mit gegebener Determinante gibt ([R, Abschnitt 9.1: Def. (i)-(vi), Satz 1.1, Lemma 1.3, Satz 1.2]; die obige Aussage ist etwas schwächer als Satz 1.2, man verwende im Beweis statt des Lemmas 1.4 die Abschätzung am Ende des letzten Vortrages).

Nun betrachten wir den Fall der positiv definiten binären quadratischen Formen noch einmal genauer. Man zeige [R, Lemma 9.4.1 (ohne (ii)) und Theorem 9.4.2] und bestimme alle reduzierten primitiven Formen der Diskriminante -4, -8 und -12 (vgl. [C, Tabelle 2.14]). Man zeige [C, Lemma 2.5 & Korollar 2.6] und folgere die drei auf Fermat zurückgehende Sätze [C, (1.1)].

Vortragende:	Markus Freitag	Mo, 19.7.2010
	Yvonne Mertes	Di, 20.7.2010

Literatur

[C] Cox, David A.: *Primes of the form $x^2 + ny^2$. Fermat, class field theory, and complex multiplication*, John Wiley and Sons Inc., 1989

[N] Neukirch, Jürgen: *Algebraische Zahlentheorie*, Springer Verlag, 1992

[R] Rose, Harvey E.: *A Course in Number Theory*, Oxford University Press, 1988

[S] Serre, Jean-Pierre: *A Course in Arithmetic*, Springer Verlag, 1973

[Sche] Scheid, Harald: *Zahlentheorie*, Bibiliographisches Institut, 2003

[Schm] Schmidt, Alexander: *Einführung in die algebraische Zahlentheorie*, Springer Verlag, 2007

[SO] Scharlau, Winfried & Opolka, Hans: *Von Fermat bis Minkowski. Eine Vorlesung über Zahlentheorie und ihre Entwicklung*, Springer Verlag, 1980