Automorphe Produkte für Unitäre Gruppen

Dipl. Math. Eric F. W. Hofmann

8.2.2011

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Unendliche Produkte

Betrachten wir zunächst ein einfaches Beispiel

$$h(q) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - q^n\right) \qquad \text{(absolut konvergent für } |q| < 1\text{).}$$

Dies ist das Weierstraßprodukt zur geometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$.
Bereits dieses Beispiel hat einen interessanten Anwendungsbezug:
In der q-Entwicklung von $h(q)^{-1}$ taucht die Partitionsfunktion $p(n)$ auf:

$$\frac{1}{h(q)} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, q^n = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + \cdots,$$

welche weiterhin Gegenstand aktueller Forschung ist.

Unendliche Produkte

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Betrachten wir zunächst ein einfaches Beispiel

$$h(q) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - q^n\right) \qquad \text{(absolut konvergent für } |q| < 1\text{).}$$

Dies ist das Weierstraßprodukt zur geometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$.
Bereits dieses Beispiel hat einen interessanten Anwendungsbezug:
In der q-Entwicklung von $h(q)^{-1}$ taucht die Partitionsfunktion $p(n)$ auf:

$$\frac{1}{h(q)} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, q^n = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + \cdots ,$$

welche weiterhin Gegenstand aktueller Forschung ist.

Die Δ-Funktion

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Betrachten wir folgendes Beispiel

$$\Delta(q) = q\,h(q)^{24} = q\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - q^n\right)^{24}, \text{ für } \quad |q| < 1.$$

Bezeichne mit $\mathbb{H}$ die obere Halbebene

$$\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C}\,;\; \Im\tau > 0\}\,.$$

Jedes $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ lässt sich als $q = e^{2\pi i\tau}$ für ein $\tau \in \mathbb{H}$ schreiben. Damit wird $\Delta(\tau)$ zu einer holomorphen Funktion auf $\mathbb{H}$.

Diese weist eine bemerkenswerte Symmetrieeigenschaft auf:

$$\Delta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \left(c\tau + d\right)^{12}\Delta(\tau),$$

$$\text{für} \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \text{ mit } \quad ad - bc = 1.$$

Die Δ-Funktion

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Betrachten wir folgendes Beispiel

$$\Delta(q) = q\,h(q)^{24} = q\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^n\right)^{24}, \text{ für } \quad |q|<1.$$

Bezeichne mit $\mathbb{H}$ die obere Halbebene

$$\mathbb{H} = \left\{\tau\in\mathbb{C}\,;\ \Im\tau>0\right\}.$$

Jedes $q\in\mathbb{C}$ mit $|q|<1$ lässt sich als $q = e^{2\pi i\tau}$ für ein $\tau\in\mathbb{H}$ schreiben. Damit wird $\Delta(\tau)$ zu einer holomorphen Funktion auf $\mathbb{H}$.
Diese weist eine bemerkenswerte Symmetrieeigenschaft auf:

$$\Delta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \left(c\tau+d\right)^{12}\Delta(\tau),$$

$$\text{für} \quad a,b,c,d\in\mathbb{Z}, \text{ mit } \quad ad-bc=1.$$

Die Operation von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, der Matrizen

$$\Gamma(1) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})\,;\; ad - bc = 1 \right\}$$

Operiert auf $\mathbb{H}$ durch *Möbiustransformationen*.
Für $M \in \Gamma(1)$ mit $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ und $\tau \in \mathbb{H}$ hat man

$$M\,:\,\tau \longmapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Neben $\Gamma(1)$ betrachtet man auch *Kongruenzuntergruppen* wie $\Gamma(N)$ und $\Gamma_0(N)$:

$$\Gamma(N) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\,;\, \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \bmod N \right\}$$

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\,;\, c \equiv 0 \bmod N \right\}$$

Die Operation von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, der Matrizen

$$\Gamma(1) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})\,;\ ad - bc = 1 \right\}$$

Operiert auf $\mathbb{H}$ durch *Möbiustransformationen*.
Für $M \in \Gamma(1)$ mit $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ und $\tau \in \mathbb{H}$ hat man

$$M \,:\, \tau \longmapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Neben $\Gamma(1)$ betrachtet man auch *Kongruenzuntergruppen* wie $\Gamma(N)$ und $\Gamma_0(N)$:

$$\Gamma(N) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\,;\ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \bmod N \right\}$$

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\,;\ c \equiv 0 \bmod N \right\}$$

Die Operation von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}$

Die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, der Matrizen

$$\Gamma(1) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})\,;\; ad - bc = 1 \right\}$$

Operiert auf $\mathbb{H}$ durch *Möbiustransformationen*.
Für $M \in \Gamma(1)$ mit $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ und $\tau \in \mathbb{H}$ hat man

$$M \,:\, \tau \longmapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Neben $\Gamma(1)$ betrachtet man auch *Kongruenzuntergruppen* wie $\Gamma(N)$ und $\Gamma_0(N)$:

$$\Gamma(N) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\,;\; \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \bmod N \right\}$$
$$\Gamma_0(N) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\,;\; c \equiv 0 \bmod N \right\}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Definition

Sei Γ eine Untergruppe von endlichem Index in $\Gamma(1)$, und $k \in \mathbb{Z}$. Eine Funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ heißt *schwach holomorphe Modulform*, wenn

1. $f(\tau)$ ist holomorph auf $\mathbb{H}$.
2. Es gilt

$$f(M\tau) = (c\tau + d)^k f(\tau), \quad \text{für jedes} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$$

3. f ist (höchstens) meromorph in den Spitzen von Γ.

Man schreibt nun $f \in \mathcal{M}_k^!(\Gamma)$.

Die letzte Bedingung bedarf einer kurzen Erläuterung ...

Modulformen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Definition

Sei Γ eine Untergruppe von endlichem Index in $\Gamma(1)$, und $k \in \mathbb{Z}$. Eine Funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ heißt *schwach holomorphe Modulform*, wenn

1. $f(\tau)$ ist holomorph auf $\mathbb{H}$.
2. Es gilt
$$f(M\tau) = (c\tau + d)^k f(\tau), \quad \text{für jedes} \quad M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$$
3. f ist (höchstens) meromorph in den Spitzen von Γ.

Man schreibt nun $f \in \mathcal{M}_k^!(\Gamma)$.

Die letzte Bedingung bedarf einer kurzen Erläuterung ...

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Definition

Sei Γ eine Untergruppe von endlichem Index in $\Gamma(1)$, und $k \in \mathbb{Z}$. Eine Funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ heißt *schwach holomorphe Modulform*, wenn

1. $f(\tau)$ ist holomorph auf $\mathbb{H}$.
2. Es gilt
$$f(M\tau) = (c\tau + d)^k f(\tau), \quad \text{für jedes} \quad M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$$
3. f ist (höchstens) meromorph in den Spitzen von Γ.

Man schreibt nun $f \in \mathcal{M}^!_k(\Gamma)$.

Die letzte Bedingung bedarf einer kurzen Erläuterung ...

Modulformen

Definition

Sei Γ eine Untergruppe von endlichem Index in $\Gamma(1)$, und $k \in \mathbb{Z}$. Eine Funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ heißt *schwach holomorphe Modulform*, wenn

1. $f(\tau)$ ist holomorph auf $\mathbb{H}$.
2. Es gilt
$$f(M\tau) = (c\tau + d)^k f(\tau), \quad \text{für jedes} \quad M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$$
3. f ist (höchstens) meromorph in den Spitzen von Γ.

Man schreibt nun $f \in \mathcal{M}^!_k(\Gamma)$.

Die letzte Bedingung bedarf einer kurzen Erläuterung ...

Fourierentwicklung

Unter den *Spitzen* von Γ versteht man Γ-Äquivalenzklassen von Punkten in $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. Sei nun $\Gamma = \Gamma(1)$, dann gibt es nur die Spitze $[\infty] = \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$. Für $f \in \mathcal{M}^!_k(\Gamma(1))$ gilt

$$f(\tau + 1) = f(\tau), \text{ da } \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma(1).$$

Somit hat f eine Fourierentwicklung in $q = e^{2\pi i\tau} = e(\tau)$

$$f(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c(n) q^n.$$

Man bezeichnet nun f als
- *meromorph in der Spitze* ∞, wenn $c(n) \neq 0$ nur für $n \gg -\infty$.
- *holomorph in der Spitze* ∞, wenn $c(n) \neq 0$ nur für $n \geq 0$.
- *Spitzenform*, wenn $c(n) \neq 0$ nur für $n > 0$.

Fourierentwicklung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Unter den *Spitzen* von Γ versteht man Γ-Äquivalenzklassen von Punkten in $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. Sei nun $\Gamma = \Gamma(1)$, dann gibt es nur die Spitze $[\infty] = \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$. Für $f \in \mathcal{M}_k^!(\Gamma(1))$ gilt

$$f(\tau + 1) = f(\tau), \text{ da } \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma(1).$$

Somit hat f eine Fourierentwicklung in $q = e^{2\pi i \tau} = e(\tau)$

$$f(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c(n) q^n.$$

Man bezeichnet nun f als

- *meromorph in der Spitze* ∞, wenn $c(n) \neq 0$ nur für $n \gg -\infty$.
- *holomorph in der Spitze* ∞, wenn $c(n) \neq 0$ nur für $n \geq 0$.
- *Spitzenform*, wenn $c(n) \neq 0$ nur für $n > 0$.

Fourierentwicklung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Unter den *Spitzen* von Γ versteht man Γ-Äquivalenzklassen von Punkten in $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. Sei nun $\Gamma = \Gamma(1)$, dann gibt es nur die Spitze $[\infty] = \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$. Für $f \in \mathcal{M}^!_k(\Gamma(1))$ gilt

$$f(\tau + 1) = f(\tau), \text{ da } \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma(1).$$

Somit hat f eine Fourierentwicklung in $q = e^{2\pi i\tau} = e(\tau)$

$$f(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c(n) q^n.$$

Man bezeichnet nun f als

meromorph in der Spitze ∞, wenn $c(n) \neq 0$ nur für $n \gg -\infty$.

holomorph in der Spitze ∞, wenn $c(n) \neq 0$ nur für $n \geq 0$.

Spitzenform, wenn $c(n) \neq 0$ nur für $n > 0$.

Fourierentwicklung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Unter den *Spitzen* von Γ versteht man Γ-Äquivalenzklassen von Punkten in $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. Sei nun $\Gamma = \Gamma(1)$, dann gibt es nur die Spitze $[\infty] = \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$. Für $f \in \mathcal{M}^!_k(\Gamma(1))$ gilt

$$f(\tau + 1) = f(\tau), \text{ da } \quad T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma(1).$$

Somit hat f eine Fourierentwicklung in $q = e^{2\pi i \tau} = e(\tau)$

$$f(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c(n) q^n.$$

Man bezeichnet nun f als

meromorph in der Spitze ∞, wenn $c(n) \neq 0$ nur für $n \gg -\infty$. $f \in \mathcal{M}^!_k(\Gamma(1))$

holomorph in der Spitze ∞, wenn $c(n) \neq 0$ nur für $n \geq 0$. $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma(1))$

Spitzenform, wenn $c(n) \neq 0$ nur für $n > 0$. $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma(1))$

Beispiele

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Die Deltafunktion ist demnach eine *Spitzenform* vom Gewicht 12, ihre Fourierentwicklung lautet

$$\Delta(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\, q^n = q - 24\, q^2 + 252\, q^3 - 1472\, q^4 + \cdots \ \in \mathcal{S}_{12}(\Gamma(1)).$$

Eisensteinreihen (für $k \geq 4$, k gerade)

$$E_k(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{Z} \\ \mathrm{ggT}(m,n)=1}} \frac{1}{(m\tau + n)^k} = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n)\, q^n \quad \in \mathcal{M}_k(\Gamma(1)),$$

mit B_k der k-ten Bernoulli-Zahl und $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$.

Die modulare Invariante j

$$j(\tau) = \frac{E_4(\tau)^3}{\Delta(\tau)} = q^{-1} + 744 + 196884\, q + 21493760\, q^2 + \cdots \ \in \mathcal{M}_0^!(\Gamma(1)).$$

Beispiele

Die Deltafunktion ist demnach eine *Spitzenform* vom Gewicht 12, ihre Fourierentwicklung lautet

$$\Delta(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\, q^n = q - 24\, q^2 + 252\, q^3 - 1472\, q^4 + \cdots \ \in \mathcal{S}_{12}(\Gamma(1)).$$

Eisensteinreihen (für $k \geq 4$, k gerade)

$$E_k(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z} \\ \mathrm{ggT}(m,n)=1}} \frac{1}{(m\tau + n)^k} = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n)\, q^n \quad \in \mathcal{M}_k(\Gamma(1)),$$

mit B_k der k-ten Bernoulli-Zahl und $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$.

Die modulare Invariante j

$$j(\tau) = \frac{E_4(\tau)^3}{\Delta(\tau)} = q^{-1} + 744 + 196884\, q + 21493760\, q^2 + \cdots \ \in \mathcal{M}_0^!(\Gamma(1)).$$

Beispiele

Die Deltafunktion ist demnach eine *Spitzenform* vom Gewicht 12, ihre Fourierentwicklung lautet

$$\Delta(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\, q^n = q - 24\, q^2 + 252\, q^3 - 1472\, q^4 + \cdots \ \in \mathcal{S}_{12}(\Gamma(1)).$$

Eisensteinreihen (für $k \geq 4$, k gerade)

$$E_k(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{Z} \\ \mathrm{ggT}(m,n)=1}} \frac{1}{(m\tau + n)^k} = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n)\, q^n \quad \in \mathcal{M}_k(\Gamma(1)),$$

mit B_k der k-ten Bernoulli-Zahl und $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$.

Die modulare Invariante j

$$j(\tau) = \frac{E_4(\tau)^3}{\Delta(\tau)} = q^{-1} + 744 + 196884\, q + 21493760\, q^2 + \cdots \ \in \mathcal{M}_0^!(\Gamma(1)).$$

Beispiele

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Die Deltafunktion ist demnach eine *Spitzenform* vom Gewicht 12, ihre Fourierentwicklung lautet

$$\Delta(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\, q^n = q - 24\, q^2 + 252\, q^3 - 1472\, q^4 + \cdots \ \in \mathcal{S}_{12}(\Gamma(1)).$$

Eisensteinreihen (für $k \geq 4$, k gerade)

$$E_k(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z} \\ \mathrm{ggT}(m,n)=1}} \frac{1}{(m\tau + n)^k} = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n)\, q^n \quad \in \mathcal{M}_k(\Gamma(1)),$$

mit B_k der k-ten Bernoulli-Zahl und $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$.
Die modulare Invariante j

$$j(\tau) = \frac{E_4(\tau)^3}{\Delta(\tau)} = q^{-1} + 744 + 196884\, q + 21493760\, q^2 + \cdots \ \in \mathcal{M}_0^!(\Gamma(1)).$$

Neue Interpretationen und neue Beispiele durch Borcherdsprodukte

Aus *Liftungen* ergeben sich überraschende Korrespondenzen zwischen Modulformen. Die *Liftung von Borcherds* erlaubt es, aus der Fourierentwicklung einer Modulformen eine andere Modulform als undendliches Produkt zu erhalten.
Beispielsweise
Dabei folgende :

Neue Interpretationen und neue Beispiele durch Borcherdsprodukte

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Aus *Liftungen* ergeben sich überraschende Korrespondenzen zwischen Modulformen. Die *Liftung von Borcherds* erlaubt es, aus der Fourierentwicklung einer Modulformen eine andere Modulform als undendliches Produkt zu erhalten. Beispielsweise

$$\begin{array}{c} \Delta(\tau) \\ \uparrow \\ 12\theta(\tau) \end{array}$$

Dabei bezeichnet $\theta(\tau)$ folgende Funktion:

$$\theta(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2} = 1 + 2\sum_{n>0} q^{n^2} \quad \text{(Jacobische Theta-Funktion)}$$

Neue Interpretationen und neue Beispiele durch Borcherdsprodukte

Aus *Liftungen* ergeben sich überraschende Korrespondenzen zwischen Modulformen. Die *Liftung von Borcherds* erlaubt es, aus der Fourierentwicklung einer Modulformen eine andere Modulform als undendliches Produkt zu erhalten. Beispielsweise

$$\begin{array}{ccc} \Delta(\tau) & \qquad & j(\tau) \\ \uparrow & & \uparrow \\ 12\theta(\tau) & & f(\tau) \end{array}$$

Dabei bezeichnen $\theta(\tau)$ und $f(\tau)$ folgende Funktionen:

$$\theta(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2} = 1 + 2\sum_{n>0} q^{n^2} \quad \text{(Jacobische Theta-Funktion)}$$

$$f(\tau) = 3q^{-3} - 744q + 80256q^4 + \cdots ,$$

Neue Interpretationen und neue Beispiele durch Borcherdsprodukte

Aus *Liftungen* ergeben sich überraschende Korrespondenzen zwischen Modulformen. Die *Liftung von Borcherds* erlaubt es, aus der Fourierentwicklung einer Modulformen eine andere Modulform als undendliches Produkt zu erhalten. Beispielsweise

$$\begin{tikzcd}
\Delta(\tau) & j(\tau) & E_4(\tau) \\
12\theta(\tau) \arrow[u] & f(\tau) \arrow[u] & g(\tau) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Dabei bezeichnen $\theta(\tau)$, $f(\tau)$ und $g(\tau)$ folgende Funktionen:

$$\theta(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2} = 1 + 2\sum_{n>0} q^{n^2} \quad \text{(Jacobische Theta-Funktion)}$$

$$f(\tau) = 3q^{-3} - 744q + 80256q^4 + \cdots, \qquad g(\tau) = q^{-3} + 4 - 240\,q + \cdots$$

Neue Interpretationen und neue Beispiele durch Borcherdsprodukte

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Aus *Liftungen* ergeben sich überraschende Korrespondenzen zwischen Modulformen. Die *Liftung von Borcherds* erlaubt es, aus der Fourierentwicklung einer Modulformen eine andere Modulform als undendliches Produkt zu erhalten. Beispielsweise

$$\begin{array}{ccc} \Delta(\tau) & j(\tau) & E_4(\tau) \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 12\theta(\tau) & f(\tau) & g(\tau) \end{array}$$

Dabei bezeichnen $\theta(\tau)$, $f(\tau)$ und $g(\tau)$ folgende Funktionen:

$$\theta(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2} = 1 + 2\sum_{n>0} q^{n^2} \quad \text{(Jacobische Theta-Funktion)}$$

$$f(\tau) = 3q^{-3} - 744q + 80256q^4 + \cdots, \qquad g(\tau) = q^{-3} + 4 - 240\,q + \cdots$$

(Hierbei sind $\theta(\tau)$, $f(\tau)$ und $g(\tau)$ alle aus $\mathcal{M}^!_{1/2}\big(\Gamma_0(4)\big)$.)

Orthogonale Modulformen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sei $(V, (\cdot,\cdot))$ ein quadratischer Raum mit $(\cdot,\cdot)$ einer symmetrischen, nicht ausgearteten Bilinearform der Signatur $(2, b)$. Die spezielle orthogonale Gruppe $\mathrm{SO}(V)$ ist über $\mathbb{R}$ isomorph zu $\mathrm{SO}(2, b)$.

Ein symmetrisches Gebiet für die Operation von $\mathrm{SO}(V)$ auf V erhält man als Quotient

$$\mathrm{SO}(V)(\mathbb{R})/\mathcal{C} \simeq \mathrm{SO}(2, b)/\left(\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(b)\right) \simeq \mathcal{H}_{\mathrm{O}}$$

(Das Tubengebietsmodell $\mathcal{H}_{\mathrm{O}}$ trägt die Struktur einer komplexen Mannigfaltigkeit.)

Sei L eine gerades Gitter in V, wir nehmen an, L sei unimodular.
Die arithmetische Gruppe $\Gamma_L = \mathrm{SO}(L)^+$ operiert auf $\mathcal{H}_{\mathrm{O}}$. Man definiert nun orthogonale Modulformen für Γ_L auf $\mathcal{H}_{\mathrm{O}}$ ähnlich wie für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}$.

Orthogonale Modulformen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sei $(V, (\cdot,\cdot))$ ein quadratischer Raum mit $(\cdot,\cdot)$ einer symmetrischen, nicht ausgearteten Bilinearform der Signatur $(2, b)$. Die spezielle orthogonale Gruppe $\mathrm{SO}(V)$ ist über $\mathbb{R}$ isomorph zu $\mathrm{SO}(2, b)$.

Ein symmetrisches Gebiet für die Operation von $\mathrm{SO}(V)$ auf V erhält man als Quotient

$$\mathrm{SO}(V)(\mathbb{R})/\mathcal{C} \simeq \mathrm{SO}(2,b)/\left(\mathrm{SO}(2)\times\mathrm{SO}(b)\right) \simeq \mathcal{H}_O$$

(Das Tubengebietsmodell $\mathcal{H}_O$ trägt die Struktur einer komplexen Mannigfaltigkeit.)

Sei L eine gerades Gitter in V, wir nehmen an, L sei unimodular.
Die arithmetische Gruppe $\Gamma_L = \mathrm{SO}(L)^+$ operiert auf $\mathcal{H}_O$. Man definiert nun orthogonale Modulformen für Γ_L auf $\mathcal{H}_O$ ähnlich wie für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}$.

Orthogonale Modulformen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sei $(V, (\cdot,\cdot))$ ein quadratischer Raum mit $(\cdot,\cdot)$ einer symmetrischen, nicht ausgearteten Bilinearform der Signatur $(2, b)$. Die spezielle orthogonale Gruppe $\mathrm{SO}(V)$ ist über $\mathbb{R}$ isomorph zu $\mathrm{SO}(2, b)$.

Ein symmetrisches Gebiet für die Operation von $\mathrm{SO}(V)$ auf V erhält man als Quotient

$$\mathrm{SO}(V)(\mathbb{R})/\mathcal{C} \simeq \mathrm{SO}(2,b)/\left(\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(b)\right) \simeq \mathcal{H}_{\mathrm{O}}$$

(Das Tubengebietsmodell $\mathcal{H}_{\mathrm{O}}$ trägt die Struktur einer komplexen Mannigfaltigkeit.)

Sei L eine gerades Gitter in V, wir nehmen an, L sei unimodular.
Die arithmetische Gruppe $\Gamma_L = \mathrm{SO}(L)^+$ operiert auf $\mathcal{H}_{\mathrm{O}}$. Man definiert nun orthogonale Modulformen für Γ_L auf $\mathcal{H}_{\mathrm{O}}$ ähnlich wie für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}$.

Orthogonale Modulformen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sei $(V, (\cdot,\cdot))$ ein quadratischer Raum mit $(\cdot,\cdot)$ einer symmetrischen, nicht ausgearteten Bilinearform der Signatur $(2, b)$. Die spezielle orthogonale Gruppe $\mathrm{SO}(V)$ ist über $\mathbb{R}$ isomorph zu $\mathrm{SO}(2, b)$.

Ein symmetrisches Gebiet für die Operation von $\mathrm{SO}(V)$ auf V erhält man als Quotient

$$\mathrm{SO}(V)(\mathbb{R})/\mathcal{C} \simeq \mathrm{SO}(2, b)/\left(\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(b)\right) \simeq \mathcal{H}_{\mathrm{O}}$$

(Das Tubengebietsmodell $\mathcal{H}_{\mathrm{O}}$ trägt die Struktur einer komplexen Mannigfaltigkeit.)

Sei L eine gerades Gitter in V, wir nehmen an, L sei unimodular.
Die arithmetische Gruppe $\Gamma_L = \mathrm{SO}(L)^+$ operiert auf $\mathcal{H}_{\mathrm{O}}$. Man definiert nun orthogonale Modulformen für Γ_L auf $\mathcal{H}_{\mathrm{O}}$ ähnlich wie für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}$.

Orthogonale Modulformen

Sei $(V, (\cdot, \cdot))$ ein quadratischer Raum mit $(\cdot, \cdot)$ einer symmetrischen, nicht ausgearteten Bilinearform der Signatur $(2, b)$. Die spezielle orthogonale Gruppe $\mathrm{SO}(V)$ ist über $\mathbb{R}$ isomorph zu $\mathrm{SO}(2, b)$.

Ein symmetrisches Gebiet für die Operation von $\mathrm{SO}(V)$ auf V erhält man als Quotient

$$\mathrm{SO}(V)(\mathbb{R})/\mathcal{C} \simeq \mathrm{SO}(2, b)/\left(\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(b)\right) \simeq \mathcal{H}_{\mathrm{O}}$$

(Das Tubengebietsmodell $\mathcal{H}_{\mathrm{O}}$ trägt die Struktur einer komplexen Mannigfaltigkeit.)

Sei L eine gerades Gitter in V, wir nehmen an, L sei unimodular.
Die arithmetische Gruppe $\Gamma_L = \mathrm{SO}(L)^+$ operiert auf $\mathcal{H}_{\mathrm{O}}$. Man definiert nun orthogonale Modulformen für Γ_L auf $\mathcal{H}_{\mathrm{O}}$ ähnlich wie für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}$.

Der Satz von Borcherds

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\mathcal{M}^!_{1-b/2}(\Gamma(1)) \ni f(\tau) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ n\gg-\infty}} c(n)e(n\tau), \quad \tau \in \mathbb{H}.$$

Der Satz von Borcherds

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\uparrow$$

$$\mathcal{M}^{!}_{1-b/2}(\Gamma(1)) \ni f(\tau) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ n\gg-\infty}} c(n)e(n\tau), \quad \tau \in \mathbb{H}.$$

Der Satz von Borcherds

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\Psi_L(Z;f) = e\big((\rho, Z)\big) \prod_{\substack{\lambda \in K \\ (\lambda, W) > 0}} \big(1 - e\big((\lambda, Z)\big)\big)^{c\left(\lambda^2/2\right)}, \quad Z \in \mathcal{H}_{\mathrm{O}}.$$

$$\uparrow$$

$$\mathcal{M}^!_{1-b/2}(\Gamma(1)) \ni f(\tau) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \gg -\infty}} c(n) e(n\tau), \quad \tau \in \mathbb{H}.$$

Der Satz von Borcherds

$$\Psi_L(Z;f) = e\big((\rho, Z)\big) \prod_{\substack{\lambda \in K \\ (\lambda, W) > 0}} \Big(1 - e\big((\lambda, Z)\big)\Big)^{c(\lambda^2/2)}, \quad Z \in \mathcal{H}_O.$$

$$\uparrow$$

$$\mathcal{M}^!_{1-b/2}(\Gamma(1)) \ni f(\tau) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \gg -\infty}} c(n) e(n\tau), \quad \tau \in \mathbb{H}.$$

1. Meromorphe orthogonale Modulform für Γ_L auf $\mathcal{H}_O$ vom Gewicht $c(0)/2$.
2. Null- und Polstellen auf *Heegner Divisoren* (durch den Hauptteil von $f(\tau)$ bestimmt).
3. Die Liftung ist multiplikativ: $\Psi_L(Z; f + g) = \Psi_L(Z; f) \cdot \Psi_L(Z; g)$.

Der Satz von Borcherds

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\Psi_L(Z;f) = e\big((\rho, Z)\big) \prod_{\substack{\lambda \in K \\ (\lambda, W) > 0}} \big(1 - e\big((\lambda, Z)\big)\big)^{c(\lambda^2/2)}, \quad Z \in \mathcal{H}_O.$$

$$\uparrow$$

$$\mathcal{M}^!_{1-b/2}(\Gamma(1)) \ni f(\tau) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \gg -\infty}} c(n) e(n\tau), \quad \tau \in \mathbb{H}.$$

1. Meromorphe orthogonale Modulform für Γ_L auf $\mathcal{H}_O$ vom Gewicht $c(0)/2$.
2. Null- und Polstellen auf *Heegner Divisoren* (durch den Hauptteil von $f(\tau)$ bestimmt).
3. Die Liftung ist multiplikativ: $\Psi_L(Z; f+g) = \Psi_L(Z;f) \cdot \Psi_L(Z;g)$.

Der Satz von Borcherds

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\Psi_L(Z;f) = e\big((\rho, Z)\big) \prod_{\substack{\lambda \in K \\ (\lambda, W) > 0}} \big(1 - e\big((\lambda, Z)\big)\big)^{c(\lambda^2/2)}, \quad Z \in \mathcal{H}_O.$$

$$\uparrow$$

$$\mathcal{M}^!_{1-b/2}(\Gamma(1)) \ni f(\tau) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \gg -\infty}} c(n) e(n\tau), \quad \tau \in \mathbb{H}.$$

1. Meromorphe orthogonale Modulform für Γ_L auf $\mathcal{H}_O$ vom Gewicht $c(0)/2$.
2. Null- und Polstellen auf *Heegner Divisoren* (durch den Hauptteil von $f(\tau)$ bestimmt).
3. Die Liftung ist multiplikativ: $\Psi_L(Z; f + g) = \Psi_L(Z; f) \cdot \Psi_L(Z; g)$.

Hermitesche Räume über imaginärquadratischen Zahlkörpern

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sei $d \in \mathbb{Z}$, $d < 0$ und quadratfrei. Sei $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.
Weiter bezeichne $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$ den Ring der ganzen Zahlen in $\mathbb{F}$ und $\mathcal{D}_{\mathbb{F}}^{-1}$ das Dedekindsche Komplementärmodul, $D_{\mathbb{F}}$ die Diskriminante von $\mathbb{F}$ und $\delta = \sqrt{D_{\mathbb{F}}}$.

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein hermitescher Raum über $\mathbb{F}$ und $(V_{\mathbb{R}}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ der zugehörige komplexe hermitesche Raum mit der hermiteschen Form

$$\langle \alpha\, v, \beta\, w\rangle = \alpha\bar{\beta}\,\langle v, w\rangle \quad \text{der Signatur } (1, m).$$

Ein symmetrisches Gebiet für die Operation der speziellen unitären Gruppe $\mathrm{SU}(V)(\mathbb{R})$ erhält man als Quotient

$$\mathrm{SU}(V)(\mathbb{R})/\mathcal{C}_U \simeq \mathrm{SU}(1,m)/\left(\mathrm{SU}(1)\times\mathrm{SU}(m)\right) \simeq \mathcal{K}_{\mathrm{U}}.$$

Hermitesche Räume über imaginärquadratischen Zahlkörpern

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sei $d \in \mathbb{Z}$, $d < 0$ und quadratfrei. Sei $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.
Weiter bezeichne $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$ den Ring der ganzen Zahlen in $\mathbb{F}$ und $\mathcal{D}_{\mathbb{F}}^{-1}$ das Dedekindsche Komplementärmodul, $D_{\mathbb{F}}$ die Diskriminante von $\mathbb{F}$ und $\delta = \sqrt{D_{\mathbb{F}}}$.

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein hermitescher Raum über $\mathbb{F}$ und $(V_{\mathbb{R}}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ der zugehörige komplexe hermitesche Raum mit der hermiteschen Form

$$\langle \alpha v, \beta w\rangle = \alpha\bar{\beta}\langle v, w\rangle \quad \text{der Signatur } (1, m).$$

Ein symmetrisches Gebiet für die Operation der speziellen unitären Gruppe $\mathrm{SU}(V)(\mathbb{R})$ erhält man als Quotient

$$\mathrm{SU}(V)(\mathbb{R})/\mathcal{C}_U \simeq \mathrm{SU}(1, m)/\left(\mathrm{SU}(1) \times \mathrm{SU}(m)\right) \simeq \mathcal{K}_{\mathrm{U}}.$$

Hermitesche Räume über imaginärquadratischen Zahlkörpern

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sei $d \in \mathbb{Z}$, $d < 0$ und quadratfrei. Sei $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.
Weiter bezeichne $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$ den Ring der ganzen Zahlen in $\mathbb{F}$ und $\mathcal{D}_{\mathbb{F}}^{-1}$ das Dedekindsche Komplementärmodul, $D_{\mathbb{F}}$ die Diskriminante von $\mathbb{F}$ und $\delta = \sqrt{D_{\mathbb{F}}}$.

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein hermitescher Raum über $\mathbb{F}$ und $(V_{\mathbb{R}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ der zugehörige komplexe hermitesche Raum mit der hermiteschen Form

$$\langle \alpha\, v, \beta\, w \rangle = \alpha \bar{\beta}\, \langle v, w \rangle \quad \text{der Signatur } (1, m).$$

Ein symmetrisches Gebiet für die Operation der speziellen unitären Gruppe $\mathrm{SU}(V)(\mathbb{R})$ erhält man als Quotient

$$\mathrm{SU}(V)(\mathbb{R})/\mathcal{C}_U \simeq \mathrm{SU}(1, m)/\left(\mathrm{SU}(1) \times \mathrm{SU}(m)\right) \simeq \mathcal{K}_{\mathrm{U}}.$$

Hermitesche Räume über imaginärquadratischen Zahlkörpern

Sei $d \in \mathbb{Z}$, $d < 0$ und quadratfrei. Sei $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.
Weiter bezeichne $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$ den Ring der ganzen Zahlen in $\mathbb{F}$ und $\mathcal{D}_{\mathbb{F}}^{-1}$ das Dedekindsche Komplementärmodul, $D_{\mathbb{F}}$ die Diskriminante von $\mathbb{F}$ und $\delta = \sqrt{D_{\mathbb{F}}}$.

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein hermitescher Raum über $\mathbb{F}$ und $(V_{\mathbb{R}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ der zugehörige komplexe hermitesche Raum mit der hermiteschen Form

$$\langle \alpha\, v, \beta\, w \rangle = \alpha \bar{\beta} \, \langle v, w \rangle \quad \text{der Signatur } (1, m).$$

Ein symmetrisches Gebiet für die Operation der speziellen unitären Gruppe $\mathrm{SU}(V)(\mathbb{R})$ erhält man als Quotient

$$\mathrm{SU}(V)(\mathbb{R})/\mathcal{C}_U \simeq \mathrm{SU}(1, m)/\left(\mathrm{SU}(1) \times \mathrm{SU}(m)\right) \simeq \mathcal{K}_{\mathrm{U}}.$$

Hermitesche Räume über imaginärquadratischen Zahlkörpern

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sei $d \in \mathbb{Z}$, $d < 0$ und quadratfrei. Sei $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.
Weiter bezeichne $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$ den Ring der ganzen Zahlen in $\mathbb{F}$ und $\mathcal{D}_{\mathbb{F}}^{-1}$ das Dedekindsche Komplementärmodul, $D_{\mathbb{F}}$ die Diskriminante von $\mathbb{F}$ und $\delta = \sqrt{D_{\mathbb{F}}}$.

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein hermitescher Raum über $\mathbb{F}$ und $(V_{\mathbb{R}}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ der zugehörige komplexe hermitesche Raum mit der hermiteschen Form

$$\langle \alpha\, v, \beta\, w\rangle = \alpha\bar{\beta}\,\langle v, w\rangle \quad \text{der Signatur } (1, m).$$

Ein symmetrisches Gebiet für die Operation der speziellen unitären Gruppe $\mathrm{SU}(V)(\mathbb{R})$ erhält man als Quotient

$$\mathrm{SU}(V)(\mathbb{R})/\mathcal{C}_U \simeq \mathrm{SU}(1, m)/\left(\mathrm{SU}(1) \times \mathrm{SU}(m)\right) \simeq \mathcal{K}_{\mathrm{U}}.$$

Hermitesche Gitter
und das Siegelgebietsmodell

Sei nun L ein hermitesches Gitter in V, d.h. ein $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$-Modul mit $L \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{F}}} \mathbb{F} = V$. Wir nehmen an, L sei gerade und unimodular (d.h. $\langle \lambda, \lambda \rangle \in \mathbb{Z}$ und $\langle L, L \rangle = \mathcal{D}_{\mathbb{F}}^{-1}$.)
Die arithmetische Untergruppe $\Gamma_L = \mathrm{SU}(L) \subset \mathrm{SU}(V)$ operiert auf $\mathcal{K}_{\mathrm{U}}$.

Sei $\ell \in L$ *primitiv* und *isotrop*, $\ell' \in L$
Sei $z = \ell' + \tau\ell + \sigma \in V_{\mathbb{R}}$, mit $\tau \in \mathbb{C}$ und $\sigma \in \mathbb{C}^{m-1}$ negativ definit. Ist $\langle z, z \rangle > 0$, so repräsentiert z eine Element $[z] \in \mathcal{K}_{\mathrm{U}} \subset \mathbb{P}(V)(\mathbb{R})$.

Das Siegelgebiet

Man erhält so ein affines Modell für $\mathcal{K}_{\mathrm{U}}$, das *Siegelgebiet*

$$\mathcal{H}_{\mathrm{U}} = \left\{ (\tau, \sigma)\,;\; 2\Im\tau|\delta|^{-1} > -\langle \sigma, \sigma \rangle \right\}.$$

(Ein weiteres affines Modell ist der sogenannte *m-Ball* $\mathcal{B}_m$.)

Hermitesche Gitter
und das Siegelgebietsmodell

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sei nun L ein hermitesches Gitter in V, d.h. ein $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$-Modul mit $L \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{F}}} \mathbb{F} = V$. Wir nehmen an, L sei gerade und unimodular (d.h. $\langle \lambda, \lambda \rangle \in \mathbb{Z}$ und $\langle L, L \rangle = \mathcal{D}_{\mathbb{F}}^{-1}$.)
Die arithmetische Untergruppe $\Gamma_L = \mathrm{SU}(L) \subset \mathrm{SU}(V)$ operiert auf $\mathcal{K}_{\mathrm{U}}$.

Sei $\ell \in L$ *primitiv* und *isotrop*, $\ell' \in L$
Sei $z = \ell' + \tau\ell + \sigma \in V_{\mathbb{R}}$, mit $\tau \in \mathbb{C}$ und $\sigma \in \mathbb{C}^{m-1}$ negativ definit. Ist $\langle z, z \rangle > 0$, so repräsentiert z eine Element $[z] \in \mathcal{K}_{\mathrm{U}} \subset \mathbb{P}(V)(\mathbb{R})$.

Das Siegelgebiet

Man erhält so ein affines Modell für $\mathcal{K}_{\mathrm{U}}$, das *Siegelgebiet*

$$\mathcal{H}_{\mathrm{U}} = \left\{ (\tau, \sigma)\,;\; 2\Im\tau |\delta|^{-1} > -\langle \sigma, \sigma \rangle \right\}.$$

(Ein weiteres affines Modell ist der sogenannte *m-Ball* $\mathcal{B}_m$.)

Hermitesche Gitter

und das Siegelgebietsmodell

Sei nun L ein hermitesches Gitter in V, d.h. ein $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$-Modul mit $L \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{F}}} \mathbb{F} = V$. Wir nehmen an, L sei gerade und unimodular (d.h. $\langle \lambda, \lambda \rangle \in \mathbb{Z}$ und $\langle L, L \rangle = \mathcal{D}_{\mathbb{F}}^{-1}$.) Die arithmetische Untergruppe $\Gamma_L = \mathrm{SU}(L) \subset \mathrm{SU}(V)$ operiert auf $\mathcal{K}_{\mathrm{U}}$.

Sei $\ell \in L$ *primitiv* und *isotrop*, $\ell' \in L$ mit $\langle \ell, \ell' \rangle \neq 0$.

Sei $z = \ell' + \tau\ell + \sigma \in V_{\mathbb{R}}$, mit $\tau \in \mathbb{C}$ und $\sigma \in \mathbb{C}^{m-1}$ negativ definit. Ist $\langle z, z \rangle > 0$, so repräsentiert z eine Element $[z] \in \mathcal{K}_{\mathrm{U}} \subset \mathbb{P}(V)(\mathbb{R})$.

Das Siegelgebiet

Man erhält so ein affines Modell für $\mathcal{K}_{\mathrm{U}}$, das *Siegelgebiet*

$$\mathcal{H}_{\mathrm{U}} = \left\{ (\tau, \sigma) \, ; \; 2\Im\tau |\delta|^{-1} > -\langle \sigma, \sigma \rangle \right\}.$$

(Ein weiteres affines Modell ist der sogenannte *m-Ball* $\mathcal{B}_m$.)

Hermitesche Gitter und das Siegelgebietsmodell

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sei nun L ein hermitesches Gitter in V, d.h. ein $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$-Modul mit $L \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{F}}} \mathbb{F} = V$. Wir nehmen an, L sei gerade und unimodular (d.h. $\langle \lambda, \lambda \rangle \in \mathbb{Z}$ und $\langle L, L \rangle = \mathcal{D}_{\mathbb{F}}^{-1}$.)
Die arithmetische Untergruppe $\Gamma_L = \mathrm{SU}(L) \subset \mathrm{SU}(V)$ operiert auf $\mathcal{K}_{\mathrm{U}}$.

Sei $\ell \in L$ *primitiv* und *isotrop*, $\ell' \in L$ ebenfalls isotrop und $\langle \ell, \ell' \rangle = -\delta^{-1}$.
Sei $z = \ell' + \tau\ell + \sigma \in V_{\mathbb{R}}$, mit $\tau \in \mathbb{C}$ und $\sigma \in \mathbb{C}^{m-1}$ negativ definit. Ist $\langle z, z \rangle > 0$, so repräsentiert z eine Element $[z] \in \mathcal{K}_{\mathrm{U}} \subset \mathbb{P}(V)(\mathbb{R})$.

Das Siegelgebiet

Man erhält so ein affines Modell für $\mathcal{K}_{\mathrm{U}}$, das *Siegelgebiet*

$$\mathcal{H}_{\mathrm{U}} = \left\{ (\tau, \sigma)\,;\; 2\Im\tau|\delta|^{-1} > -\langle \sigma, \sigma \rangle \right\}.$$

(Ein weiteres affines Modell ist der sogenannte *m-Ball* $\mathcal{B}_m$.)

Hermitesche Gitter und das Siegelgebietsmodell

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sei nun L ein hermitesches Gitter in V, d.h. ein $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$-Modul mit $L \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{F}}} \mathbb{F} = V$. Wir nehmen an, L sei gerade und unimodular (d.h. $\langle \lambda, \lambda \rangle \in \mathbb{Z}$ und $\langle L, L \rangle = \mathcal{D}_{\mathbb{F}}^{-1}$.) Die arithmetische Untergruppe $\Gamma_L = \mathrm{SU}(L) \subset \mathrm{SU}(V)$ operiert auf $\mathcal{K}_{\mathrm{U}}$.

Sei $\ell \in L$ *primitiv* und *isotrop*, $\ell' \in L$ ebenfalls isotrop und $\langle \ell, \ell' \rangle = -\delta^{-1}$.
Sei $z = \ell' + \tau\ell + \sigma \in V_{\mathbb{R}}$, mit $\tau \in \mathbb{C}$ und $\sigma \in \mathbb{C}^{m-1}$ negativ definit. Ist $\langle z, z \rangle > 0$, so repräsentiert z eine Element $[z] \in \mathcal{K}_{\mathrm{U}} \subset \mathbb{P}(V)(\mathbb{R})$.

Das Siegelgebiet

Man erhält so ein affines Modell für $\mathcal{K}_{\mathrm{U}}$, das *Siegelgebiet*

$$\mathcal{H}_{\mathrm{U}} = \left\{ (\tau, \sigma)\,;\; 2\Im\tau|\delta|^{-1} > -\langle \sigma, \sigma \rangle \right\}.$$

(Ein weiteres affines Modell ist der sogenannte *m-Ball* $\mathcal{B}_m$.)

Hermitesche Gitter und das Siegelgebietsmodell

Sei nun L ein hermitesches Gitter in V, d.h. ein $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$-Modul mit $L \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{F}}} \mathbb{F} = V$. Wir nehmen an, L sei gerade und unimodular (d.h. $\langle \lambda, \lambda \rangle \in \mathbb{Z}$ und $\langle L, L \rangle = \mathcal{D}_{\mathbb{F}}^{-1}$.)
Die arithmetische Untergruppe $\Gamma_L = \mathrm{SU}(L) \subset \mathrm{SU}(V)$ operiert auf $\mathcal{K}_{\mathrm{U}}$.

Sei $\ell \in L$ *primitiv* und *isotrop*, $\ell' \in L$ ebenfalls isotrop und $\langle \ell, \ell' \rangle = -\delta^{-1}$.
Sei $z = \ell' + \tau\ell + \sigma \in V_{\mathbb{R}}$, mit $\tau \in \mathbb{C}$ und $\sigma \in \mathbb{C}^{m-1}$ negativ definit. Ist $\langle z, z \rangle > 0$, so repräsentiert z eine Element $[z] \in \mathcal{K}_{\mathrm{U}} \subset \mathbb{P}(V)(\mathbb{R})$.

Das Siegelgebiet

Man erhält so ein affines Modell für $\mathcal{K}_{\mathrm{U}}$, das *Siegelgebiet*

$$\mathcal{H}_{\mathrm{U}} = \left\{ (\tau, \sigma) \,;\; 2\Im\tau |\delta|^{-1} > -\langle \sigma, \sigma \rangle \right\}.$$

(Ein weiteres affines Modell ist der sogenannte *m-Ball* $\mathcal{B}_m$.)

Unitäre Modulformen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Definition

Sei Γ eine Untergruppe von endlichem Index in Γ_L, und k eine ganze Zahl. Eine Funktion $f : \mathcal{H}_{\mathrm{U}} \to \mathbb{C}$ heißt *unitäre Modulform* (für Γ zum Gewicht k), wenn

1. f auf $\mathcal{H}_{\mathrm{U}}$ holomorph ist.
2. Für jedes $\gamma \in \Gamma$ gilt $f(\gamma(\tau, \sigma)) = j\big(\gamma; \tau, \sigma\big)^k f(\tau, \sigma)$.
3. f regulär in den Spitzen (Randkomponenten) von $\mathcal{H}_{\mathrm{U}}$ ist.
   (Folgt für $m > 1$ aus dem Köcherprinzip).

Modulformen auf $\mathcal{H}_{\mathrm{U}}$ lassen sich als Fourier-Jacobi-Reihen entwickeln

$$f(\tau, \sigma) = \sum_{n \in \mathbb{Q}} a_n(\sigma) e(n\tau).$$

Unitäre Modulformen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Definition

Sei Γ eine Untergruppe von endlichem Index in Γ_L, und k eine ganze Zahl. Eine Funktion $f : \mathcal{H}_\mathrm{U} \to \mathbb{C}$ heißt *unitäre Modulform* (für Γ zum Gewicht k), wenn

1. f auf $\mathcal{H}_\mathrm{U}$ holomorph ist.
2. Für jedes $\gamma \in \Gamma$ gilt $f(\gamma(\tau, \sigma)) = j\left(\gamma; \tau, \sigma\right)^k f(\tau, \sigma)$.
3. f regulär in den Spitzen (Randkomponenten) von $\mathcal{H}_\mathrm{U}$ ist.
   (Folgt für $m > 1$ aus dem Köcherprinzip).

Modulformen auf $\mathcal{H}_\mathrm{U}$ lassen sich als Fourier-Jacobi-Reihen entwickeln

$$f(\tau, \sigma) = \sum_{n \in \mathbb{Q}} a_n(\sigma) e(n\tau).$$

Unitäre Modulformen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Definition

Sei Γ eine Untergruppe von endlichem Index in Γ_L, und k eine ganze Zahl. Eine Funktion $f : \mathcal{H}_{\mathrm{U}} \to \mathbb{C}$ heißt *unitäre Modulform* (für Γ zum Gewicht k), wenn

1. f auf $\mathcal{H}_{\mathrm{U}}$ holomorph ist.
2. Für jedes $\gamma \in \Gamma$ gilt $f(\gamma(\tau, \sigma)) = j\big(\gamma; \tau, \sigma\big)^k f(\tau, \sigma)$.
3. f regulär in den Spitzen (Randkomponenten) von $\mathcal{H}_{\mathrm{U}}$ ist.
   (Folgt für $m > 1$ aus dem Köcherprinzip).

Modulformen auf $\mathcal{H}_{\mathrm{U}}$ lassen sich als Fourier-Jacobi-Reihen entwickeln

$$f(\tau, \sigma) = \sum_{n \in \mathbb{Q}} a_n(\sigma) e(n\tau).$$

Unitäre Modulformen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Definition

Sei Γ eine Untergruppe von endlichem Index in Γ_L, und k eine ganze Zahl. Eine Funktion $f : \mathcal{H}_\mathrm{U} \to \mathbb{C}$ heißt *unitäre Modulform* (für Γ zum Gewicht k), wenn

1. f auf $\mathcal{H}_\mathrm{U}$ holomorph ist.
2. Für jedes $\gamma \in \Gamma$ gilt $f(\gamma(\tau, \sigma)) = j\big(\gamma; \tau, \sigma\big)^k f(\tau, \sigma)$.
3. f regulär in den Spitzen (Randkomponenten) von $\mathcal{H}_\mathrm{U}$ ist.
   (Folgt für $m > 1$ aus dem Köcherprinzip).

Modulformen auf $\mathcal{H}_\mathrm{U}$ lassen sich als Fourier-Jacobi-Reihen entwickeln

$$f(\tau, \sigma) = \sum_{n \in \mathbb{Q}} a_n(\sigma) e(n\tau).$$

Unitäre Modulformen

Definition

Sei Γ eine Untergruppe von endlichem Index in Γ_L, und k eine ganze Zahl. Eine Funktion $f : \mathcal{H}_{\mathrm{U}} \to \mathbb{C}$ heißt *unitäre Modulform* (für Γ zum Gewicht k), wenn

1. f auf $\mathcal{H}_{\mathrm{U}}$ holomorph ist.
2. Für jedes $\gamma \in \Gamma$ gilt $f(\gamma(\tau, \sigma)) = j\big(\gamma; \tau, \sigma\big)^k f(\tau, \sigma)$.
3. f regulär in den Spitzen (Randkomponenten) von $\mathcal{H}_{\mathrm{U}}$ ist.
   (Folgt für $m > 1$ aus dem Köcherprinzip).

Modulformen auf $\mathcal{H}_{\mathrm{U}}$ lassen sich als Fourier-Jacobi-Reihen entwickeln

$$f(\tau, \sigma) = \sum_{n \in \mathbb{Q}} a_n(\sigma) e(n\tau).$$

Einbettungen

Setze $(\cdot,\cdot) := \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}/\mathbb{Q}} \langle\cdot,\cdot\rangle = 2\Re\langle\cdot,\cdot\rangle$. Damit wird $(V,(\cdot,\cdot))$ zu einem quadratischen Raum der Signatur $(2, 2m)$. Man erhält so eine Einbettung

$$\mathrm{SU}(V) \hookrightarrow \mathrm{SO}(V)$$

Diese induziert wiederum eine Einbettung der symmetrischen Gebiete

$$\alpha : \mathcal{H}_{\mathrm{U}} \hookrightarrow \mathcal{H}_{\mathrm{O}}.$$

Durch Rückzug lässt sich nun der Borcherds-Lift auf $\mathrm{SU}(1,n)$ übertragen.

$$\alpha^*(\Psi_L)(\tau,\sigma) \longleftarrow \Psi_L(Z; f).$$

Technische Schwierigkeiten hierbei

1. Verschiedene komplexe Strukturen auf $V, \langle\cdot,\cdot\rangle$ und $V, (\cdot,\cdot)$.
2. Wahl der Gitterbasis für L als $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$-Modul und als $\mathbb{Z}$-Modul.
3. Wahl der Spitzen, Berücksichtigung der Geometrie der Randkomponenten.

Einbettungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Setze $(\cdot,\cdot) := \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}/\mathbb{Q}} \langle\cdot,\cdot\rangle = 2\Re\langle\cdot,\cdot\rangle$. Damit wird $(V,(\cdot,\cdot))$ zu einem quadratischen Raum der Signatur $(2,2m)$. Man erhält so eine Einbettung

$$\mathrm{SU}(V) \hookrightarrow \mathrm{SO}(V)$$

Diese induziert wiederum eine Einbettung der symmetrischen Gebiete

$$\alpha : \mathcal{H}_{\mathrm{U}} \hookrightarrow \mathcal{H}_{\mathrm{O}}.$$

Durch Rückzug lässt sich nun der Borcherds-Lift auf $\mathrm{SU}(1,n)$ übertragen.

$$\alpha^*(\Psi_L)(\tau,\sigma) \longleftarrow \Psi_L(Z;f).$$

Technische Schwierigkeiten hierbei

1. Verschiedene komplexe Strukturen auf $V,\langle\cdot,\cdot\rangle$ und $V,(\cdot,\cdot)$.
2. Wahl der Gitterbasis für L als $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$-Modul und als $\mathbb{Z}$-Modul.
3. Wahl der Spitzen, Berücksichtigung der Geometrie der Randkomponenten.

Einbettungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Setze $(\cdot,\cdot) := \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}/\mathbb{Q}} \langle\cdot,\cdot\rangle = 2\Re\langle\cdot,\cdot\rangle$. Damit wird $(V,(\cdot,\cdot))$ zu einem quadratischen Raum der Signatur $(2,2m)$. Man erhält so eine Einbettung

$$\mathrm{SU}(V) \hookrightarrow \mathrm{SO}(V)$$

Diese induziert wiederum eine Einbettung der symmetrischen Gebiete

$$\alpha : \mathcal{H}_{\mathrm{U}} \hookrightarrow \mathcal{H}_{\mathrm{O}}.$$

Durch Rückzug lässt sich nun der Borcherds-Lift auf $\mathrm{SU}(1,n)$ übertragen.

$$\alpha^*(\Psi_L)(\tau,\sigma) \longleftarrow \Psi_L(Z;f).$$

Technische Schwierigkeiten hierbei

1. Verschiedene komplexe Strukturen auf $V,\langle\cdot,\cdot\rangle$ und $V,(\cdot,\cdot)$.
2. Wahl der Gitterbasis für L als $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$-Modul und als $\mathbb{Z}$-Modul.
3. Wahl der Spitzen, Berücksichtigung der Geometrie der Randkomponenten.

Einbettungen

Setze $(\cdot,\cdot) := \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}/\mathbb{Q}} \langle\cdot,\cdot\rangle = 2\Re\langle\cdot,\cdot\rangle$. Damit wird $(V,(\cdot,\cdot))$ zu einem quadratischen Raum der Signatur $(2, 2m)$. Man erhält so eine Einbettung

$$\mathrm{SU}(V) \hookrightarrow \mathrm{SO}(V)$$

Diese induziert wiederum eine Einbettung der symmetrischen Gebiete

$$\alpha : \mathcal{H}_{\mathrm{U}} \hookrightarrow \mathcal{H}_{\mathrm{O}}.$$

Durch Rückzug lässt sich nun der Borcherds-Lift auf $\mathrm{SU}(1,n)$ übertragen.

$$\alpha^*(\Psi_L)(\tau,\sigma) \longleftarrow \Psi_L(Z;f).$$

Technische Schwierigkeiten hierbei

1. Verschiedene komplexe Strukturen auf V,$\langle\cdot,\cdot\rangle$ und V,$(\cdot,\cdot)$.
2. Wahl der Gitterbasis für L als $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$-Modul und als $\mathbb{Z}$-Modul.
3. Wahl der Spitzen, Berücksichtigung der Geometrie der Randkomponenten.

Das Hauptresultat

$$\Xi_L(z;f) = e\big(\delta\,\langle z,\rho\rangle\big) \prod_{\substack{\lambda\in K \\ (\lambda,W)>0}} \big(1 - e\big(\delta\,\langle z,\lambda\rangle\big)\big)^{c(\langle\lambda,\lambda\rangle)}$$

$$\uparrow$$

$$f(\tau) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ n\gg-\infty}} c(n)e(n\tau) \in \mathcal{M}^!_{1-m}(\Gamma(1))$$

wobei $z = \ell' + \tau\ell + \sigma \in \mathcal{K}_{\mathrm{U}}$.

1. Meromorphe unitäre Modulform für Γ_L auf $\mathcal{H}_{\mathrm{U}}$ vom Gewicht $c(0)/2$.
2. Null- und Polstellen auf *Heegner Divisoren*
3. Die Liftung ist multiplikativ.

Das Hauptresultat

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\Xi_L(z;f) = e\big(\delta\langle z,\rho\rangle\big) \prod_{\substack{\lambda\in K\\(\lambda,W)>0}} \big(1 - e\big(\delta\langle z,\lambda\rangle\big)\big)^{c(\langle\lambda,\lambda\rangle)}$$

$$\uparrow$$

$$f(\tau) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\gg-\infty}} c(n)e(n\tau) \in \mathcal{M}^!_{1-m}(\Gamma(1))$$

wobei $z = \ell' + \tau\ell + \sigma \in \mathcal{K}_\mathrm{U}$.

1. Meromorphe unitäre Modulform für Γ_L auf $\mathcal{H}_\mathrm{U}$ vom Gewicht $c(0)/2$.
2. Null- und Polstellen auf *Heegner Divisoren*
3. Die Liftung ist multiplikativ.

Das Hauptresultat

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\Xi_L(z;f) = e\big(\delta\,\langle z,\rho\rangle\big) \prod_{\substack{\lambda\in K\\(\lambda,W)>0}} \Big(1 - e\big(\delta\,\langle z,\lambda\rangle\big)\Big)^{c(\langle\lambda,\lambda\rangle)}$$

$$\uparrow$$

$$f(\tau) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\gg-\infty}} c(n)e(n\tau) \;\in \mathcal{M}^!_{1-m}(\Gamma(1)),$$

$$\text{wobei}\quad z = \ell' + \tau\ell + \sigma \in \mathcal{K}_{\mathsf{U}}.$$

1. Meromorphe unitäre Modulform für Γ_L auf $\mathcal{H}_{\mathsf{U}}$ vom Gewicht $c(0)/2$.
2. Null- und Polstellen auf *Heegner Divisoren*
3. Die Liftung ist multiplikativ.

Das Hauptresultat

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\Xi_L(z;f) = e\big(\delta\left\langle z,\rho\right\rangle\big) \prod_{\substack{\lambda\in K\\(\lambda,W)>0}} \Big(1 - e\big(\delta\left\langle z,\lambda\right\rangle\big)\Big)^{c\left(\left\langle\lambda,\lambda\right\rangle\right)}$$

$$\uparrow$$

$$f(\tau) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\gg-\infty}} c(n)e(n\tau) \ \in \mathcal{M}^!_{1-m}(\Gamma(1)),$$

$$\text{wobei} \quad z = \ell' + \tau\ell + \sigma \in \mathcal{K}_{\mathrm{U}}.$$

1. Meromorphe unitäre Modulform für Γ_L auf $\mathcal{H}_{\mathrm{U}}$ vom Gewicht $c(0)/2$.
2. Null- und Polstellen auf *Heegner Divisoren*
3. Die Liftung ist multiplikativ.

Das Hauptresultat

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\Xi_L(z;f) = e\big(\delta\langle z,\rho\rangle\big)\prod_{\substack{\lambda\in K\\(\lambda,W)>0}}\big(1-e\big(\delta\langle z,\lambda\rangle\big)\big)^{c(\langle\lambda,\lambda\rangle)}$$

$$\uparrow$$

$$f(\tau) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\gg-\infty}} c(n)e(n\tau)\ \in \mathcal{M}^!_{1-m}(\Gamma(1)),$$

$$\text{wobei}\quad z = \ell' + \tau\ell + \sigma \in \mathcal{K}_{\mathrm{U}}.$$

1. Meromorphe unitäre Modulform für Γ_L auf $\mathcal{H}_{\mathrm{U}}$ vom Gewicht $c(0)/2$.
2. Null- und Polstellen auf *Heegner Divisoren*
3. Die Liftung ist multiplikativ.

Das Hauptresultat

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\Xi_L(z;f) = e\big(\delta\,\langle z,\rho\rangle\big) \prod_{\substack{\lambda\in K\\(\lambda,W)>0}} \Big(1 - e\big(\delta\,\langle z,\lambda\rangle\big)\Big)^{c(\langle\lambda,\lambda\rangle)}$$

$$\uparrow$$

$$f(\tau) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\gg-\infty}} c(n)e(n\tau) \;\in \mathcal{M}^!_{1-m}(\Gamma(1)),$$

$$\text{wobei}\quad z = \ell' + \tau\ell + \sigma \in \mathcal{K}_{\mathrm{U}}.$$

1. Meromorphe unitäre Modulform für Γ_L auf $\mathcal{H}_{\mathrm{U}}$ vom Gewicht $c(0)/2$.
2. Null- und Polstellen auf *Heegner Divisoren*
3. Die Liftung ist multiplikativ.

Ein Beispiel: SU(1, 1)

Sei $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ für $d < 0$ und quadratfrei, sei $V = \mathbb{F} \times \mathbb{F}$ und L das Gitter $L = \mathcal{O}_\mathbb{F} \oplus \mathcal{D}_\mathbb{F}^{-1}$, mit der hermiteschen Form

$$\langle x, y \rangle = x_1 \bar{y}_2 - x_2 \bar{y}_1 .$$

In dieser Situation ist $\mathcal{H}_\mathrm{U} = \{\tau \in \mathbb{C}\,;\ \Im\tau > 0\} \simeq \mathbb{H}$.

Sei $J_m(\tau) = q^{-m} + O(q) \in \mathcal{M}_0^!(\Gamma(1))$, für $m > 0$ *quadratfrei* (J_m ist eindeutig bestimmt).

Die Liftung $\Xi_{J_m}(\tau)$ von J_m ist eine meromorphe Modulform auf $\mathbb{H}$ und besitzt folgende Produktenwicklung (absolut konvergent für $\Im\tau > 2m|\delta|^{-1}$):

$$\Xi_{J_m}(\tau) = e\big(-\sigma_m\tau\big) \prod_{\substack{k,l\in\mathbb{Z} \\ l\geq -km}} \left(1 - e\left(k\tau - l\bar{\zeta}\right)\right)^{c(kl)},$$

$$\text{wobei} \quad \sigma_m = \sum_{d|m} d \quad \text{und} \quad \zeta \in \mathbb{F}, \text{ mit} \quad \mathcal{O}_\mathbb{F} = \mathbb{Z} + \zeta\mathbb{Z}.$$

Ein Beispiel: $\mathrm{SU}(1,1)$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sei $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ für $d < 0$ und quadratfrei, sei $V = \mathbb{F} \times \mathbb{F}$ und L das Gitter $L = \mathcal{O}_{\mathbb{F}} \oplus \mathcal{D}_{\mathbb{F}}^{-1}$, mit der hermiteschen Form

$$\langle x, y \rangle = x_1 \bar{y}_2 - x_2 \bar{y}_1.$$

In dieser Situation ist $\mathcal{H}_{\mathrm{U}} = \{\tau \in \mathbb{C}\,;\ \Im\tau > 0\} \simeq \mathbb{H}$.
Sei $J_m(\tau) = q^{-m} + O(q) \in \mathcal{M}_0^!(\Gamma(1))$, für $m > 0$ *quadratfrei* (J_m ist eindeutig bestimmt).
Die Liftung $\Xi_{J_m}(\tau)$ von J_m ist eine meromorphe Modulform auf $\mathbb{H}$ und besitzt folgende Produktenwicklung (absolut konvergent für $\Im\tau > 2m|\delta|^{-1}$):

$$\Xi_{J_m}(\tau) = e\big(-\sigma_m\tau\big) \prod_{\substack{k,l \in \mathbb{Z} \\ l \geq -km}} \left(1 - e\left(k\tau - l\bar{\zeta}\right)\right)^{c(kl)},$$

$$\text{wobei} \quad \sigma_m = \sum_{d|m} d \quad \text{und} \quad \zeta \in \mathbb{F},\ \text{mit} \quad \mathcal{O}_{\mathbb{F}} = \mathbb{Z} + \zeta\mathbb{Z}.$$

Ein Beispiel: SU(1, 1)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sei $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ für $d < 0$ und quadratfrei, sei $V = \mathbb{F} \times \mathbb{F}$ und L das Gitter $L = \mathcal{O}_{\mathbb{F}} \oplus \mathcal{D}_{\mathbb{F}}^{-1}$, mit der hermiteschen Form

$$\langle x, y \rangle = x_1 \bar{y}_2 - x_2 \bar{y}_1.$$

In dieser Situation ist $\mathcal{H}_{\mathrm{U}} = \{\tau \in \mathbb{C}\,;\ \Im\tau > 0\} \simeq \mathbb{H}$.
Sei $J_m(\tau) = q^{-m} + O(q) \in \mathcal{M}_0^!(\Gamma(1))$, für $m > 0$ *quadratfrei* (J_m ist eindeutig bestimmt).
Die Liftung $\Xi_{J_m}(\tau)$ von J_m ist eine meromorphe Modulform auf $\mathbb{H}$ und besitzt folgende Produktenwicklung: (absolut konvergent für $\Im\tau > 2m|\delta|^{-1}$):

$$\Xi_{J_m}(\tau) = e\big(-\sigma_m\tau\big) \prod_{\substack{k,l\in\mathbb{Z} \\ l\geq -km}} \left(1 - e\left(k\tau - l\bar{\zeta}\right)\right)^{c(kl)},$$

$$\text{wobei} \quad \sigma_m = \sum_{d|m} d \quad \text{und} \quad \zeta \in \mathbb{F}, \text{ mit } \quad \mathcal{O}_{\mathbb{F}} = \mathbb{Z} + \zeta\mathbb{Z}.$$

Ein Beispiel: SU(1, 1)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sei $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ für $d < 0$ und quadratfrei, sei $V = \mathbb{F} \times \mathbb{F}$ und L das Gitter $L = \mathcal{O}_{\mathbb{F}} \oplus \mathcal{D}_{\mathbb{F}}^{-1}$, mit der hermiteschen Form

$$\langle x, y \rangle = x_1 \bar{y}_2 - x_2 \bar{y}_1 .$$

In dieser Situation ist $\mathcal{H}_{\mathrm{U}} = \{\tau \in \mathbb{C}\,;\ \Im\tau > 0\} \simeq \mathbb{H}$.
Sei $J_m(\tau) = q^{-m} + O(q) \in \mathcal{M}_0^!(\Gamma(1))$, für $m > 0$ *quadratfrei.* (J_m ist eindeutig bestimmt).
Die Liftung $\Xi_{J_m}(\tau)$ von J_m ist eine meromorphe Modulform auf $\mathbb{H}$ und besitzt folgende Produktenwicklung: (absolut konvergent für $\Im\tau > 2m|\delta|^{-1}$):

$$\Xi_{J_m}(\tau) = e\big(-\sigma_m\tau\big) \prod_{\substack{k,l\in\mathbb{Z} \\ l\geq -km}} \left(1 - e\left(k\tau - l\bar{\zeta}\right)\right)^{c(kl)},$$

$$\text{wobei} \quad \sigma_m = \sum_{d|m} d \quad \text{und} \quad \zeta \in \mathbb{F}, \text{ mit } \quad \mathcal{O}_{\mathbb{F}} = \mathbb{Z} + \zeta\mathbb{Z}.$$

Ein Beispiel: SU(1, 1)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sei $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ für $d < 0$ und quadratfrei, sei $V = \mathbb{F} \times \mathbb{F}$ und L das Gitter $L = \mathcal{O}_\mathbb{F} \oplus \mathcal{D}_\mathbb{F}^{-1}$, mit der hermiteschen Form

$$\langle x, y \rangle = x_1 \bar{y}_2 - x_2 \bar{y}_1 .$$

In dieser Situation ist $\mathcal{H}_\mathrm{U} = \{\tau \in \mathbb{C}\,;\ \Im\tau > 0\} \simeq \mathbb{H}$.
Sei $J_m(\tau) = q^{-m} + O(q) \in \mathcal{M}_0^!(\Gamma(1))$, für $m > 0$ *quadratfrei.* (J_m ist eindeutig bestimmt).
Die Liftung $\Xi_{J_m}(\tau)$ von J_m ist eine meromorphe Modulform auf $\mathbb{H}$ und besitzt folgende Produktenwicklung (absolut konvergent für $\Im\tau > 2m|\delta|^{-1}$):

$$\Xi_{J_m}(\tau) = e\big(-\sigma_m \tau\big) \prod_{\substack{k,l \in \mathbb{Z} \\ l \geq -km}} \left(1 - e\left(k\tau - l\bar{\zeta}\right)\right)^{c(kl)},$$

$$\text{wobei} \quad \sigma_m = \sum_{d|m} d \quad \text{und} \quad \zeta \in \mathbb{F}, \text{ mit } \quad \mathcal{O}_\mathbb{F} = \mathbb{Z} + \zeta\mathbb{Z}.$$