Thematische Gliederung des Seminars Riemannsche Flächen

Dr. Eric Hofmann

16. August 2011

Überblick

Das Seminar soll einen Einblick in die Theorie Riemannscher Flächen geben, wobei zum einen die Grundbegriffe, sowie die Theorie der Überlagerungen und der Decktransformationen, wie sie für alle Riemannschen Flächen gültig sind, in Anlehnung an Kapitel I des Buches [Fo77] betrachtet werden sollen, zum anderen, nach Kapitel II von [Fo77] ein zentraler Satz der Theorie *kompakter* Riemannscher Flächen erarbeitet werden soll, der Satz von Riemann-Roch. Dieser stellt einen Zusammenhang her zwischen dem *Geschlecht* einer Riemannschen Fläche und der Anzahl linear unabhängiger meromorpher Funktionen auf dieser Fläche, deren Null- und Polstellenverhalten bestimmten Einschränkungen genügt. (Das Geschlecht ist eine topologische Invariante, die sich durch die 'Anzahl der Henkel' veranschaulichen lässt, sie ist 0 für eine Kugel, 1 für einen Torus, 2 für eine Bretzel etc.).

Die folgenden Seiten sollen eine kurze Übersicht geben und den Inhalt der jeweiligen Vorträge skizzieren[1]. Alle Seitenangaben beziehen sich auf [Fo77]; Funktionentheorie 1 ist zwar immer inhaltliche Voraussetzung, bei einigen Themen gibt es aber besonders deutliche Anknüpfungspunkte, weshalb ich dies dort nochmal explizit angegeben habe. Auch wo ich es nicht geschrieben habe, erwarte ich bei allen Vorträgen, dass Sie mit mir nochmal kurz Rücksprache halten, insbesondere wenn es inhaltliche oder sonstige Probleme gibt.

1,2 Definition Riemannscher Flächen und einfache Eigenschaften holomorpher Funktionen

(Zwei Vorträge)

Inhalt: Kapitel I, §1 u §2, S. 1-11, **Aufteilung:** 1. Vortrag §1 bis etwa 1.8 oder 1.11, 2. Vortrag Rest von §1 und §2.

Inhaltliche Voraussetzungen: Funktionentheorie I, Analysis II (u. III)

[1] Zumindest für die ersten paar Vorträge, für die späteren weniger ausführlich

Stichworte: Def. (komplexer) Mannigfaltigkeiten, Riemannscher Flächen und holomorpher Abbildungen; Hebbarkeitssatz, Identitätssatz, meromorphe Funktionen: Lokale Gestalt holomorpher Funktionen;

In **§1** werden Riemannsche Flächen als zweidimensionale Mannigfaltigkeiten mit einer komplexen Struktur definiert.

Grundlegende Beispiele, in den folgenden Abschniten immer wieder aufgegrifen werden, sind die Gaußsche Zahlenebene $\mathbb{C}$, offene Mengen $U \subset \mathbb{C}$, sowie die Riemannsche Zahlkugel $\mathbb{P}^1$ und Tori der Form $\mathbb{C}/\Gamma$, mit einem Gitter Γ. Nachfolgenden werden holomorphe Funktionen auf Riemannschen Flächen und holomorphe Abbildungen zwischen Riemannschen Flächen eingeführt. als wichtige Sätze hat man hier den Riemannsche Hebbarkeitssatz für holomorphe Funktionen und den Identitässatz für holomorphe Abbildungen.

Schließlich werden meromophe Funktionen auf Riemannschen Flächen eingeführt. Eine meromorphe Funktion auf einer Riemannschen Fläche X kann als holomorphe Abbildung von $X \to \mathbb{P}^1$ aufgefasst werden (Satz 1.15).

In **§2** wird die lokale Gestalt holomorpher Funktionen studiert, wesentlich ist hier Satz 2.1 und der Begriff der Vielfachheit. Aus 2.1 lassen sich die weiteren Korollare und der Satz 2.7 leicht herleiten, welche Analoga zu bekannten Sätzen aus der Funktionentheorie, wie Maximumsprinzip, Offenheit etc. darstellen. In Anknüpfung an Beispiel 1.5 d) schließt der Abschnitt mit der Behandlung doppeltperiodischer Funktionen in 2.12-2.13.

Hinweise Der erste Vortrag sollte kurz die Definition von Mannigfaltigkeiten, die aus der Analysis bekannt sein dürfte, wiederholen, wesentlich ist natürlich, dass man es hier mit komplexen Karten zu tun hat. Die Beispiele sollten ausführlich behandelt werden, insbesondere $\mathbb{P}^1$ und $\mathbb{C}/\Gamma$, welche aus der Funktionentheorie 1 nicht so vertraut sind. Dies zu ermöglichen, ist der Grund für die Aufteilung in zwei Vorträge.

Der Begriff der Vielfachheit (Bem. 2.2) sollte im zweiten Vortrag auf jeden Fall eingeführt werden.

Halten Sie bitte kurz Rücksprache mit mir, was die genaue Aufteilung der beiden Vorträge betrifft.

3 Homotopie von Kurven, Fundamentalgruppe

Inhalt: Kapitel I, §3, S. 11-18

Inhaltliche Voraussetzungen: topologische Begriffe (z.B. aus Analysis II), man sollte außerdem wissen, was man unter Äquivalenzrelationen und unter Gruppen versteht.

Stichworte: Homotopie; Zusammensetzen und Invertieren von Kurven, Punktkurven, geschlossene Kurven; Homotopie- und Fundamentalgruppe; Einfacher Zusammenhang, freie Homotopie;

Allgemeiner als in der Funktionentheorie werden Kurven hier als stetige Abbildungen eines Intervalls $I \subset \mathbb{R}$ in einen topologischen Raum betrachtet. Grundlegend ist hier der Begriff der *Homotopie*, d.h. der stetigen Verformung von Kurven, welche (Satz 3.2) eine Äquivalenzrelation auf den Kurven eines topologischen Raums X darstellt.

Dies führt für geschlossene Kurven zur Definition der Homotopiegruppe $\pi_1(X, a)$, einer Gruppenstruktur auf den Homotopieäquivalenzklassen geschlossener Kurven um $a \in X$. Es stellt sich jedoch heraus, dass diese Gruppen für jeden Basispunkt in X isomorph sind, so man sie als Fundamentalgruppe von X, $\pi_1(X)$, bezeichnen und als topologische Invariante des Raums X auffassen kann.

Hinweis: Ein paar Zeichnungen sind äußert hilfreich, sowohl zum eigenen Verständnis als auch dem der Hörer. Die Bemerkungen zur Funktoraliät, 3.15, können weggelassen werden (es sei denn, man sie gut erläutern).

4 Verzweigte und unverzweigte Überlagerungen

Inhalt: I§4, S.18-28

Inhaltliche Vorausetzungen: Topologie (aus Analysis II), Funktionentheorie 1

Stichworte: Überlagerungen, Spurtreue, Verzweigungspunkt, (Un-)Verzweigtheit; Liften von Abbildungen und Kurven; Unverzweigte, unbegrenzte Überlagerungen, Kurvenliftungs-Eigenschaft; Eigentliche Abbildungen

In der Funktionentheorie begegnet einem das Problem, dass man für manche Funktionen etwa $z \mapsto \exp(z)$ oder $z \mapsto z^2$ keine eindeutige Umkehrfunktion angeben kann, stattdessen sind der Logarithmus und die Wurzel mehrdeutig, sie besitzen mehere Zweige. Dieses Verhalten lässt sich im Kontext Riemannscher Flächen durch verzweigte Überlagerungen interpretieren.

Hinweise Die Beispiele (4.5, 4.12) sind zum Verständnis sehr wichtig und knüpfen an das an, was man schon aus der Funktionentheorie kennt. Bemerkung 4.15 ist zur Veranschaulichung sehr nützlich, man kann hier auch gut ein Bild zeichnen, wie sich die Einheitskreislinie auf die zweiblättrige Riemannsche Fläche, die zur Überlagerung $z \mapsto z^2$, gehört, liftet.

Viele der Beweise in diesem Abschnitt sind untereinander recht ähnlich, mann kann einige davon weglassen. Umbedingt behandeln sollte man die Beweise von Satz 4.2 und 4.10. Von den Beweisen in 4.6 bis 4.9 und denen in 4.14, 4.15, 4.17 und 4.19 kann man sich auf je ein oder zwei beschränken. Auch in dem Teil über eigentliche Abbildungen kann man, je nach Zeit, Beweise weglassen.

5 Universelle Überlagerungen, Decktransformationen

Inhalt: I§5, S.29-36

Inhaltliche Vorausetzungen: etwas Topologie (aus Analysis II), wissen was man unter Gruppen und und Äquivalenzrelationen versteht; außerdem ist es hilfreich, schon einmal ein kommutatives Diagramm gesehen zu haben

Stichworte: Universelle Überlagerung; Decktransformationen; Klassifikation der unverzweigten, unbegrenzten Überlagerungen der Einheitskreisscheibe

In diesem Abschnitt werden die geometrischen Betrachtungen aus §3 und §4 zusammengeführt. Es stellt sich heraus, dass es unter allen unverzweigen, unbegrenzten Überlagerungen einer Riemannschen Fläche X eine „gößte“ gibt, die sogenannte *universelle Überlagerung*, welche alle anderen sozusagen 'regiert'. Ihre Struktur lässt sich durch die Gruppe der Decktransformationen $\mathrm{Deck}(\tilde{X}/X)$ beschreiben, welche eng mit der Fundamentalgruppe von X zusammenhängt.

Hinweise Man sollte sich die Beweise in diesem Abschnitt gut strukturieren. Es genügt, einen der beiden Sätze 5.10 und 5.11 zu beweisen. Auch vorherigen Beweisen in diesem Abschnitt (zu 5.3, 5.6 und 5.9) kann man eventuell einige Teilstücke weglassen, oder nur skizzieren. *Kurze Rücksprache mit mir ist hierbei sinnvoll.*

6 Garben

Inhalt: I§6, S. 36-40

Voraussetzungen: Topologie, Vertrautheit mit einigen algebraischen Grundbegriffen, etwas Abstraktionsvermögen

Sticwörter: Prägarbe, Garbe; Halm einer (Prä-)Garbe, Funktionskeim; Überlagerungsraum einer (Prä-)Garbe, Identitätssatz;

Die Begriffsbildung der Garbe ist eine Abstraktion, die es erlaubt, Umgebungen eines Topologischen Raumes Objekte eines bestimmten Typs (z.B. Mengen, Gruppen, Vektorräume) zuzuordnen. In der Theorie Riemannscher Flächen bildet Sie den formalen Rahmen um Funktionen mit wechselnden Definitionsbereichen, Differentiale (§9) etc. zu behandeln.

Zunächst werden Prägarben (abelscher Gruppen) definiert. Hierbei wird dem System $\mathfrak{T}$ der offenen Mengen von X eine Familie $\mathscr{F}$ abelscher Gruppen zugeordnet, wobei gefordert wird, dass es zwischen den Gruppen, die zu ineinander enthaltenen Umgebungen gehören, Gruppenhomomorphismen sogenannte Beschränkungshomomorphismen bestehen. Man verfeinert diesen Begriff zu dem der Garbe, dies ist eine Prägarbe, welche zwei weiteren Bedingungen, den sogenannten Garbenaxiomen genügt.

Bemerkung: Dieser Vortrag ist ein technische Voraussetzung für alle weiteren Vorträge.

7 Algebraische Funktionen

Inhalt: I§8, S.45-53

8 Differentialformen

Inhalt: I§9, S.54-62

Voraussetzungen: Analysis, Funktionentheorie 1

Stichwörter: Wirtinger-Kalkül, diferenzierbare Funktionen; Kotangentialraum, Differential, Kotangentialvektoren vom Typ (1,0) und (0,1); Differentialformen 1. Ordnung, Residuum holomorpher Differentialformen; Äußeres Produkt, Differentialformen 2. Ordnung, Ableitung von Differentialformen; Geschlossenheit, Exaktheit;

Motivation: Die Cauchy-Riemann Differentialgleichung führen zum Wirtinger Kalkül, der Begriff des Differentials einer Funktion wird eingeführt. Im Anschluss werden sowohl holomorphe und meromorphe Differnetialformen betrachtet, sowie Differentialformen, die lediglich im reellen Sinn differenzierbar sind.

Hinweise: Die in diesem Abschnitt eingeführten Begriffe und Notationen ($\mathscr{E}^{(1)}$, $\mathscr{E}^{(0,1)}$, $\mathscr{E}^{(1,0)}$, $\Omega, \ldots$) sind wesentlich für alle weiteren Themen. Die Beweise hier bestehen in der Regel hautpsächlich aus kurzen Rechnungen.

9 Integration von Differentialformen

Inhalt: I,§10, S.62-74

Voraussetzungen: Funktionentheorie, Analysis 3 (ist zumindest hilfreich), und §§3,4,5

Stichwörter: §10.A: Integral einer Differentialform, Stammfunktion, Existenz, Perioden und Automorphiesummanden;
§10.B: Flächenintegral für Differentialformen 2. Ordnung, Residuensatz

Der Höhepunkt von Kapitel I. Hier wird unser Verständnis komplexer Integrationstheorie auf Riemannsche Flächen erweitert. Die universelle Überlagerung aus §5 ermöglicht es, die Existenz von Stammfunktionen nachzuweisen, und es stellt sich heraus, das jede geschlossene Differentialform über eine Stammfunktion verfügt. Die Theorie der Periodenintegrale und der Automorphiesummanden beleuchtet den Zusammenhang zwischen Differntialformen und Kurven auf Riemannschen Flächen, und erlaubt es schließlich genau anzugeben, welche Differentialformen über eine Stammfunktion verfügen.

Für Differentialformen 2.Ordnung wird die Integration durch ein Flächenintegral definiert, den Abschluss bildet der Resiuensatz.

Hinweise: Teil B kann kurz gehalten werden, es ist nicht nötig, den Beweis von 10.19 und den Beweis 10.20 ausführlich zu behandelt.
Mögliche Aufteilung: Es ist auch denkbar, dieses relativ umfangreiche Kapitel in zwei Vorträge aufzuteilen, hierbei sollte der zweite jedoch 10.19 und den Beweis 10.20 ausführlich und auch die Eigenschaften einer Teilung der 1 (aus Analsysis 3) bzw. aus dem Anhang wiederholen.

10 Kohomologiegruppen

Inhalt: II,§12, S.88-95

Inhaltliche Voraussetzungen: Topologie (z.B. aus Analysis 2), vorherige Abschnitte vor allem §6, es ist außerdem hilfreich zu wissen (oder nachzulesen), was man unter einer Faktorgruppe und unter einem induktiven Limes versteht

Stichwörter: Koketten, Kozyklen, Koränder; Kohomologiegruppen; Satz von Leray; 0te Kohomologiegruppe

In diesem Abschnitt werden die wesentlichen Begriffe der Kohomologietheorie eingeführt. Die erste Kohomologiegruppe einer Garbe $\mathscr{F}$ wird zunächst in Abhängigkeit einer Überdeckung $\mathfrak{U}$ der Riemannschen Fläche X eingeführt, durch die Betrachtung von Verfeinerungen und (induktive) Grenzwertbildung gelangt man dann zu einer Definition von $\mathrm{H}^1(X,\mathscr{F})$.

Als nächstes wird für einige Garben gezeigt, dass deren erste Homologiegruppen verschwinden, z.B. für die Garbe der differenzierbaren Funktionen auf X. Mit dem Satz von Leray wird ein Hilfsmittel bewiesen, dass sich in vielen Fällen bei der Berechnung von Kohomologiegruppen als nützlich erweist.

Hinweise: Als Kürzungsmöglichkeit ist es hier möglich, den Beweis zu einem der beiden Hilfssätze 12.3 bzw 12.4 wegzulassen, auch beim Beweis von Satz 12.7 man kann sich, je nach Zeit, eventuell auf einen Teil beschränken.

11 Ein Endlichkeitssatz

Inhalt II,§14, S.99-108

Inhaltliche Voraussetzungen: Keine Angst vor Funktionalanalysis (man braucht aber auch nicht viel davon)

Das wesentlich Resultat diese Abschnitts ist Endlichkeit der Dimension der Garbe meromorpher Funktionen auf einer kompakten Riemannschen Fläche, diese Zahl $\dim \mathrm{H}^1(X,\mathscr{O})$ heißt *das Geschlecht* von X und ist eine wichtige topolgische Invariante.

Hinweis: Der funktionenanalytische Teil (14.1-14.5 sowie Bew. 14.6 und 14.7) lässt sich *stark kürzen*. Es weit sinnvoller, kurz zu skizzieren, wie die Begriffe aus 14.1 eingesetzt werden, um zu Lemma 14.6 u 14.7 zu gelangen, als die diversen Hilfsaussagen und Beweise detailliert auszuführen.

Der wesentliche Teil ist 14.8 - 14.13 insbesondere die Endlichkeitsaussagen 14.9 und 14.10 sowie deren Folgerung 14.12.

Da die Inhalte von 14.14-14.16 vor allem für die Theorie nicht-kompakte Rimannsche Flächen wichtig sind (→ Kap. III), können hier, je nach Zeit, die Beweise gekürzt werden.

12 Die Exakte Kohomologiesequenz

Inhalt: II, §15, S. 109-115

Stichwörter: Garbenhomomorphismen; Exakte Sequenzen; kurze exakte Sequenzen, Verbindender Homomorphismus, Satz von der exakten Kohomologiesequenz; Satz von Dolbeaut; Satz von de Rham;

Hier wird eine wesentliches Hilfsmittel der Kohomologietheorie eingeführt, nämlich die exakten Sequenzen. Man sieht hier, wie kurze exakte Sequenzen durch einen verbindenden Homomorphisms zur exakten Kohomologiesequenz verbunden werden.

Hinweise Man sollte die Definition exakter Sequenzen gut erläutern, da sie vielen Hörern noch nicht so vertraut sein dürften.

13 Der Satz von Riemann-Roch

Inhalt II, §16, S.116-126

Stichwörter Divisoren, Hauptdivisoren, kanonischer Divisor, Grad eines Divisors; Definition der Garben $\mathcal{O}_D$ und $\mathcal{K}_D^{D'}$. Satz von Riemann-Roch, Spezialitätsindex.

Der Satz von Riemann-Roch ist der zentrale Satz in der Theorie kompakter Riemannscher Flächen, er hat jedoch weit darüber hinaus Bedeutung.

14 Der Serresche Dualitätssatz

Inhalt II, §17, S.120-129

Literatur

[Fo77] O. Forster, *Riemannsche Flächen*, Springer 1977

[Fo82] O. Forster,*Lectures on Riemann surfaces*, Springer 1982